

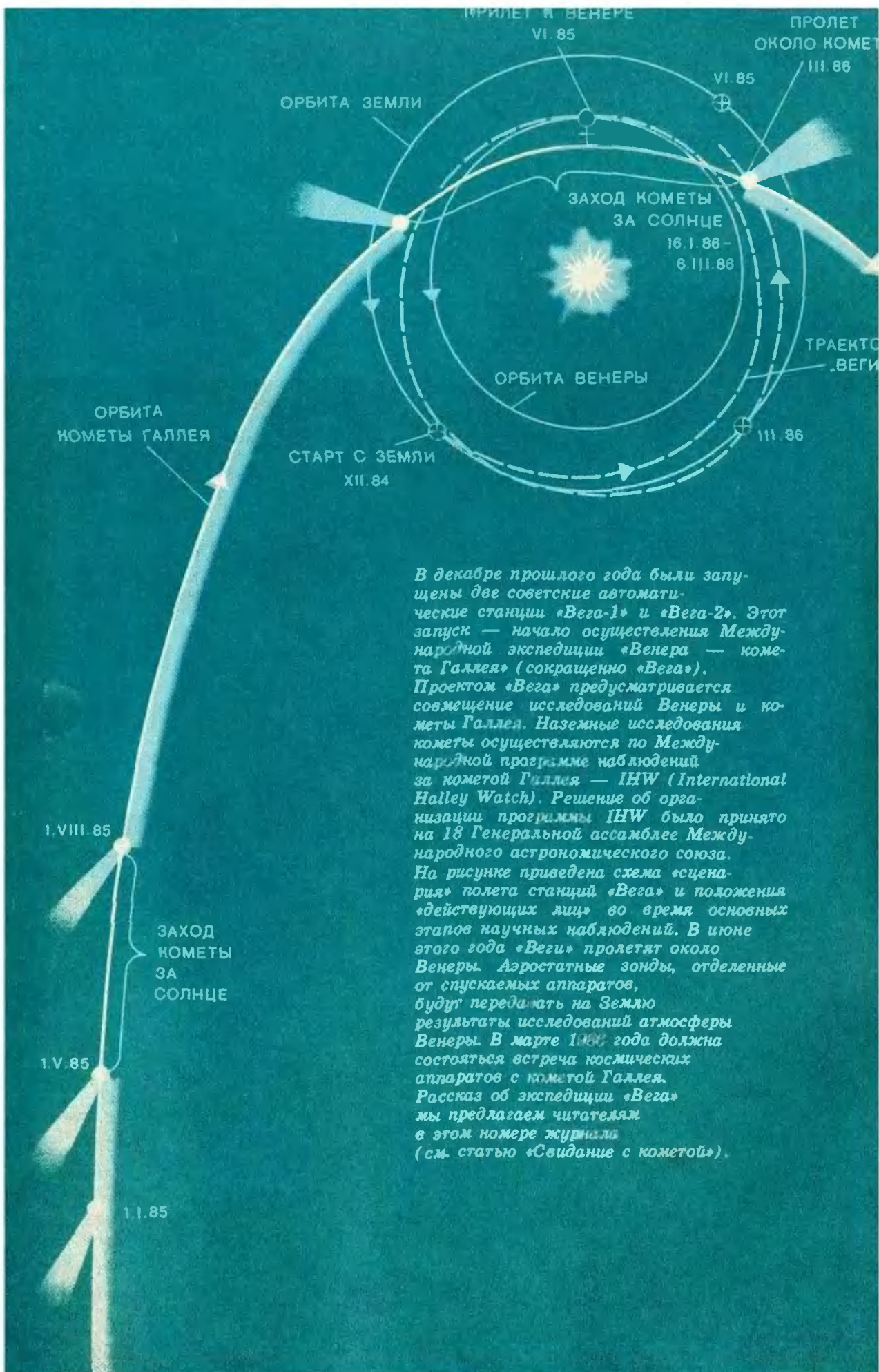
# Квант

**5**  
1985

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*







В декабре прошлого года были запущены две советские автоматические станции «Вега-1» и «Вега-2». Этот запуск — начало осуществления Международной экспедиции «Венера — комета Галлея» (сокращенно «Вега»). Проектом «Вега» предусматривается совмещение исследований Венеры и кометы Галлея. Наземные исследования кометы осуществляются по Международной программе наблюдений за кометой Галлея — IHW (International Halley Watch). Решение об организации программы IHW было принято на 18 Генеральной ассамблее Международного астрономического союза. На рисунке приведена схема «сценария» полета станций «Вега» и положения «действующих лиц» во время основных этапов научных наблюдений. В июне этого года «Веги» пролетят около Венеры. Аэростатные зонды, отделенные от спускаемых аппаратов, будут передавать на Землю результаты исследований атмосферы Венеры. В марте 1986 года должна состояться встреча космических аппаратов с кометой Галлея. Рассказ об экспедиции «Вега» мы предлагаем читателям в этом номере журнала (см. статью «Свидание с кометой»).

Научно-популярный  
физико-математический журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР

**Квант**  
**10**

**5 1985**

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:



2	40 лет Великой Победы	Forty years since V-day
3	<b>И. К. Кикоин</b> Физики — фронту	<b>I. K. Kikoin</b> . Physicists — for the front
9	<b>Б. В. Гнеденко.</b> Математика и математики в Великой Отечественной войне * * *	<b>B. V. Gnedenko.</b> Mathematics and mathematicians in the Great Patriotic War * * *
16	<b>Л. С. Марочник.</b> Свидание с кометой	<b>L. S. Marochnik.</b> Date with a comet
22	<b>В. В. Трофимов.</b> Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки	<b>V. V. Trofimov.</b> Princessa Dido, isoperimeters and soap films
28	Школа в «Кванте» Физика 8, 9, 10	Kvant's school Physics 8, 9, 10
34	Математика 10	Mathematics 10
50	Избранные школьные задачи	Selected school problems
32	Калейдоскоп «Кванта»	Kvant's kaleidoscope
37	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
15	Задачник «Кванта»	Kvant's problems
38	Призеры конкурса «Задачник «Кванта»	Kvant problem solving contest prizewinners
41	Задачи М921—М925; Ф933—Ф937 Решения задач М901—М904; Ф913—Ф916	Problems M921—M925; P933—P937 Solutions M901—M904; P913—P916
46	Практикум абитуриента <b>О. Ю. Овчинников.</b> Механическая работа и механическая энергия	College applicant's section <b>O. Yu. Ovchinnikov.</b> Mechanical work and mechanical energy
51	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
21	Информация Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция	Information Leningrad young astronomer's expedition
56	Ответы, указания, решения Смесь (55) Шахматная страничка Вычисления на шахматной доске (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (55) The chess page Chess board computations (3rd cover page)

Зал легендарных «Катюш» (см фотографию на первой странице обложки) — символ сокрушительного наступления наших войск, приведшего к победе в Великой Отечественной войне. Это также и символ героического труда ученых, инженеров и рабочих, создававших оружие победы. О работах ученых, проведенных накануне и в годы войны, читайте в статьях «Физики — фронту» и «Математика и математики в Великой Отечественной войне».



## 40 лет Великой Победы

Исполнилось сорок лет с того дня, когда народы всего мира торжественно отпраздновали победу над гитлеровским фашизмом. Дорогую цену пришлось заплатить им за эту победу. Решающий вклад в разгром фашистских полчищ, покоривших почти все страны Европы и подчинивших себе всю их экономическую мощь, внес советский народ. История знает, что не было в те годы другой страны, способной на такой подвиг. Более двадцати миллионов советских людей погибли в этой войне, которую мы справедливо называем Великой Отечественной, и среди них много совсем молодых, стоявших, как и наши читатели, на пороге своей жизни. Война всколыхнула весь народ — на фронт стремились все. Юноши и девушки, всеми правдами и неправдами старались попасть в действующую армию. Особенно много школьников боролось в тылу врага, в подпольных организа-

циях и партизанских отрядах. Молодогвардейцы Краснодона, юные разведчики в отрядах Ковпака, Федорова, Попудренко, герои крымских катакомб, сироты, усыновленные воинскими частями, — память о них навсегда останется в наших сердцах.

Огромную помощь в те годы наша армия получила от ученых. С первых же дней войны они повсюду переключились на разработку проблем, связанных с укреплением обороны страны. Благодаря их усилиям у нашей армии появились такие виды оружия, которые по своим характеристикам намного превосходили оружие врага, — реактивная артиллерия («Катюши»), танки «Т-34», самолеты «Ил-2», «Як-3», «Пе-2», противотанковые орудия с усовершенствованными снарядами. Советская наука с честью выдержала суровую проверку войной.

Советский Союз является главным оплотом мира. Благодаря миролюбивой политике нашего народа в Европе сорок лет не было никаких войн. Борясь за мир, мы твердо помним, что его не выпрашивают, а добиваются.

Агрессивные империалистические силы угрожают нам новой войной. Они расходуют колоссальные средства на совершенствование оружия массового уничтожения и увеличение его запасов, пытаются перенести гонку вооружений в космическое пространство. Но послевоенные годы убедительно показали, что советские ученые вместе со всем народом способны решать самые сложные оборонные проблемы и быстро ликвидировать все надежды империалистов на военное превосходство. Так было с атомным и термоядерным оружием, ракетными вооружениями, многозарядными боеголовками и т. п. Так недавно произошло и с крылатыми ракетами. В этом залог нашей безопасности и безопасности всего человечества.

Народы мира давно уже ведут активную борьбу против агрессивных планов империалистов и в первых рядах этих борцов мы неизменно видим нашу великую Родину.





*Эта статья оказалась последней из тех, которые академик И. К. Кикоин готовил для нашего журнала. Диктовал он ее, находясь в больнице. И в те дни его постоянно интересовали дела и публикации «Кванта». Он считал необходимым рассказать школьникам о работах ученых-физиков, проведенных накануне и во время войны, работах, целью которых было одно — помочь фронту, способствовать нашей победе. Сам И. К. Кикоин был как очевидцем, так и непосредственным участником многих из этих работ, в начале 40-х годов он возглавил одно из ведущих направлений в решении атомной проблемы, став ближайшим соратником академика И. В. Курчатова.*

## Физики — фронту

Академик И. К. КИКОИН

Великая Отечественная война всколыхнула весь советский народ, в том числе и людей, занимающихся наукой, и, конечно, физиков. Всем понятно, что значительную роль в создании современного оружия играет техника, основой которой служит физическая наука.

Разумеется, крупные военно-научные проблемы решаются заранее, и это требует немалого времени. Однако некоторые вопросы, связанные с усовершенствованием военной техники, нужно и можно было решать и во время войны, в относительно короткие сроки.

Из крупных разработок, подготовленных до войны и потребовавших нескольких лет, прежде всего следует назвать радиолокацию. Сама идея радиолокации очень проста. Она заключается в том, что электромагнитные волны, достигая металлических объектов, отражаются от них, и по отраженным волнам можно, по крайней мере принципиально, определить положение объекта в любой момент времени. Само это явление обнаружил основоположник радиотехники А. С. Попов, заметивший, что проходящие корабли мешали передаче радиосигналов. От идеи до техниче-

ского ее воплощения лежал огромный путь, который еще предстояло пройти. Дело в том, что радиоволны, достигшие поверхности металлического объекта, отражаются назад в ничтожной степени, потому что часть из них поглощается, остальные же рассеиваются объектом во все стороны. В приемник отраженных радиоволн попадает лишь малая часть энергии, первоначально направленной на изучаемый объект, скажем, самолет. И вот эту ничтожную часть надо было суметь зарегистрировать.

Первая попытка технического решения этой задачи относится к началу тридцатых годов. Затем в течение нескольких лет техника развивалась, совершенствовалась, и уже в 1939 году нашей армией был принят на вооружение РУС — радиоуправляемый самолет. Вскоре была решена задача совмещения в одной станции источника электромагнитных волн и приемника отраженных волн. Она была названа РЛС — радиолокационной станцией, и, насколько мне известно, научный приоритет, то есть первенство, в ее разработке принадлежит именно советским физикам.

Нынешние РЛС сильно отличаются от тех, что применялись в начале Великой Отечественной войны, по той простой причине, что тогда еще не была разработана полупроводниковая техника, все делалось на лампах — и генераторы, и приемники. На полупроводниковые системы перешли уже во время войны. Такие радиолокаторы можно было уже тогда устанавливать и на самолетах, а не только на земле. Это позволило вести ночной бой, то есть «видеть» вражеский самолет в темноте.

Успешное использование радиолокаторов для обнаружения движущихся военных объектов — самолетов, кораблей и т. д. — сыграло огромную роль в военном деле и способствовало нашей победе.

Примерно такая же судьба сложилась у метода защиты военных кораблей от вражеских магнитных мин. Напомню вкратце саму идею таких мин и как можно было от них защищаться.

Известно, что Земной шар создает вокруг себя магнитное поле. Оно небольшое по величине, всего около де-

сятитысячной доли теслы. Однако его достаточно, чтобы ориентировать стрелку компаса по своим силовым линиям. Если в этом поле находится массивный предмет, например корабль, и железа (вернее, стали) в нем много, несколько тысяч тонн, то магнитное поле концентрируется и может увеличиться в несколько десятков раз.

С одной стороны, для навигации с использованием компаса в качестве указателя направления движения корабля это мешает. Корабль искажает истинное направление земного магнитного поля, приходится учитывать влияние стального корпуса на компас.

Но, с другой стороны, это усиленное кораблем магнитное поле может проявиться и таким образом. Оно способно привести в действие какой-нибудь механизм, поворачивающийся под влиянием магнитной силы и замыкающий электрическую цепь. В эту цепь можно включить детонатор, погруженный во взрывчатое вещество мины. Такие магнитные мины отличаются от обычных, на которые корабль непосредственно натывается и этим вызывает взрыв, тем, что лежат на дне моря и взрываются на расстоянии — под действием лишь магнитного поля корабля.

Было известно, что эти мины разрабатывались во многих странах, и, вероятно, находились в распоряжении военно-морских сил фашистской Германии. Задача по борьбе с магнитными минами была поставлена за несколько лет до начала войны в Ленинградском физико-техническом институте. Требовалось «размагнитить» корабль, чтобы ликвидировать усиленное им магнитное поле. Каким путем?

На корабле специальным способом располагали большие катушки из проводов, по которым пропускался электрический ток. Он порождал магнитное поле, компенсирующее поле корабля, то есть поле прямо противоположного направления. К началу войны проблема была научно разрешена, и ее надо было перевести на технические рельсы, то есть создать такие устройства на действующих кораблях советского флота.

Это было очень быстро организовано. Все боевые корабли подвергались в портах «антимагнитной» об-

работке и выходили в море размагнитенными. Тем самым были спасены многие тысячи жизней наших военных моряков. Понятно, что для такой работы потребовались знания физиков, хорошие физические лаборатории, что и предопределило ее успех.

Перед войной была решена еще одна задача, казалось бы, не имевшая непосредственного отношения к военным действиям, однако ее решение оказало существенное влияние на технику.

В военное время расходуется очень много алюминия — для самолетов, меди — для снарядов. Эти материалы получают электролитическим путем. И если их производят в больших количествах, то через электролитическую ванну проходят токи, достигающие десятков тысяч ампер. Так вот, на одном из алюминиевых заводов, который запускали перед войной, и предполагалось использовать такие большие токи. Обычный способ измерения токов шунтами не годился, шунты были рассчитаны максимум на 10 тысяч ампер. Чтобы ток можно было регулировать, надо было придумать способ его измерения, не имея шунтов.

Тут без физических знаний нельзя было обойтись. Ясно, что когда по проводнику проходит такой большой ток, то созданное им магнитное поле тоже довольно велико. Измерив поле, мы узнаем, какой ток. К сожалению, форма проводов была не цилиндрической, это был ряд прямоугольных шин, сложенных параллельно. И связь магнитного поля с током, протекающим по такому проводнику, было очень трудно установить, готовых формул не было.

Тем не менее физикам удалось провести расчеты и разработать прибор, который сперва на модели, а потом непосредственно на заводе позволял промерять поле и ток. Таких приборов нужно было немного, всего несколько десятков экземпляров, и их изготовили прямо в лаборатории в течение сравнительно небольшого времени.

Перед самым началом войны завод был отрегулирован, пущен, впервые на нем применяли гигантские токи, а продукция его шла на авиазаводы. И здесь помощь физиков оказалась очень полезной.



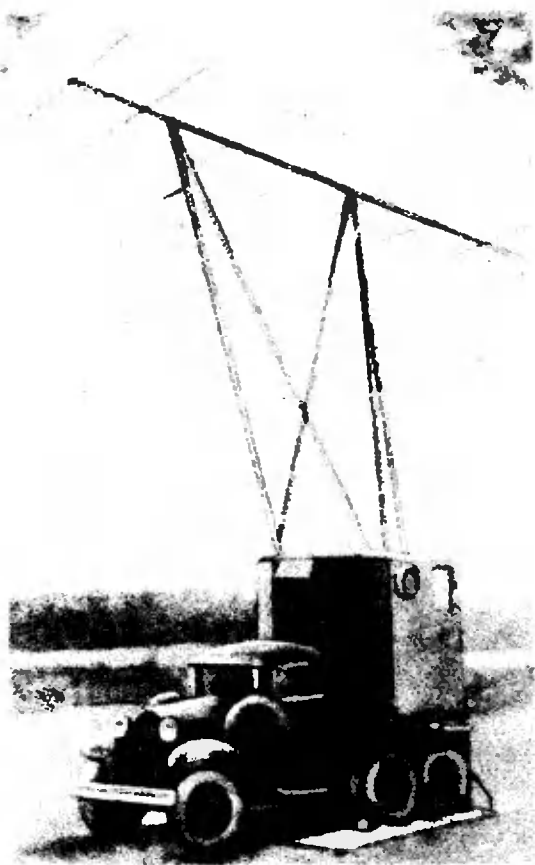
До сих пор речь шла о «заблаговременных» работах. Однако я упоминал о вопросах, которые можно было решать и во время войны.

Например, на одном из крупных уральских заводов, выпускавшем артиллерийские снаряды, значительная часть продукции браковалась. Снаряды не должны были разрываться до вылета из ствола орудия. Поэтому каждый из них проверялся, и если имелся хоть маленький дефект, снаряд браковали: военные приемщики действовали по строгим инструкциям.

Группа уральских физиков, побывавших на этом заводе, заметила сравнительно большие склады с негодной продукцией и заинтересовалась, действительно ли это брак, который может привести к преждевременному разрыву снарядов. По каким признакам велась отбраковка? Оказалось, что на глаз, по внешнему виду снаряда. Однако известно, что сталь, из которой делали снаряды, легко намагничивается, и сколько-нибудь значительный дефект может быть обнаружен чисто магнитным путем. Магнитная характеристика изделия очень чувствительна ко всяким нарушениям его целостности, стабильности структуры.

И вот ученые исследовали магнитные характеристики бракованных снарядов и выяснили, что многие поверхностные, видимые глазом дефекты в толщу снаряда не проходят. Никакого вреда, никакого уменьшения прочности снаряда они не вызывают. Предложили вместо внешнего осмотра производить отбраковку, пользуясь приборами, которые позволяли снять своего рода топографию магнитного поля снаряда. По этой картине силовых линий магнитного поля можно было судить, есть ли заслуживающие внимания дефекты.

Такие приборы были разработаны, и ими стали пользоваться непосредственно на предприятиях. Этому помогли крупные достижения наших физиков, специалистов по магнетизму. На заводах, изготовлявших снаряды, им были очень благодарны, поскольку значительная часть ранее забракованных снарядов была возвращена в число действующих. Практически увеличение выпуска снарядов произошло бесплатно, за счет уменьшения кажущегося брака.

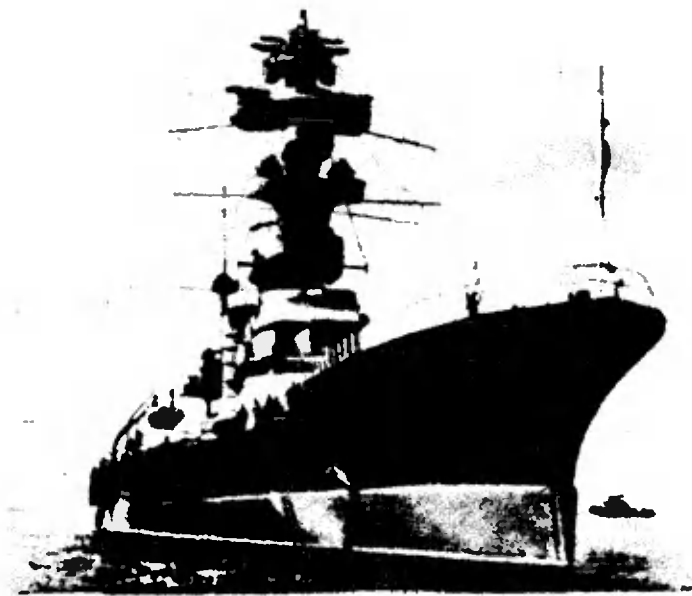


Станция дальнего обнаружения РУС-2 (приемная установка).

Метод стал широко распространяться, и сейчас, как вы, наверное, слышали, существует специальная техническая наука, называемая магнитной дефектоскопией. Она позволяет обнаруживать дефекты в готовых изделиях по их магнитным характеристикам.

Тот же самый принцип — исследование магнитного поля стальных изделий — был использован на одном из уральских заводов, выпускавших танковые двигатели. Важнейшая часть двигателя — коленчатый вал, шейки которого вращаются в подшипниках. Эти шейки должны быть очень точно изготовлены. Они делаются из калёной стали и шлифуются на специальных станках.

Тогда еще не было станков с числовым управлением, все делалось вручную, и рабочий-шлифовщик часто останавливал станок и измерял диаметр шейки. Ведь если он снимет лишний слой стали, уменьшит размеры — деталь пойдет в брак. Из-за таких частых остановок производи-



*Линкор «Марат» был первым из крупнейших кораблей Военно-Морского Флота СССР, оборудованных размагничивающей системой.*

тельность станка, естественно, использовалась не полностью.

Уральские физики придумали неплохой способ непрерывного измерения диаметра шейки без остановки шлифовального станка. Для этого вблизи обтачиваемой шейки ставился небольшой прибор, реагирующий на магнитное поле шейки. Оно, разумеется, зависит от расстояния между прибором и поверхностью шейки. По мере сошлифовывания, уменьшения диаметра детали, менялись и показания прибора. Нужно было только наблюдать за его стрелкой и по достижении ею определенной метки на шкале останавливать станок и снимать деталь — всё без промежуточных измерений.

Такие приборы непрерывного действия были установлены в больших цехах, где изготовлялись коленчатые валы. Производительность шлифовальных станков резко возросла. Значит, увеличилось число выпускаемых двигателей и, соответственно, танков. Это прямо способствовало росту военной техники на полях сражений. Так во время войны в течение нескольких месяцев была решена очень важная задача.

Еще один пример. Перед знаменитой битвой на Курской дуге в 1943 году немцы стали выпускать новые типы танков — «Пантеры» и «Тигры». Это были танки с резко усиленной броней, которую обычные снаряды пробивали с трудом или вообще не пробивали. За несколько месяцев до

битвы нашим войскам удалось захватить несколько таких танков и установить, насколько прочна их броня. Чтобы пробить ее, надо было придумать снаряды с улучшенными характеристиками. Эта задача была поручена нашим металловедам в одном из институтов Москвы.

Хорошо известно, что для увеличения твердости стали следует добавить в нее вольфрам. Однако он плавится при очень высокой температуре, обычная технология выплавления такой стали очень трудна. Организовать в массовом масштабе выплавку вольфрамовой стали было невозможно, промышленность не была к этому подготовлена. И вот сотрудники института предложили изготовить головки снарядов из металлического порошка с добавкой порошка вольфрама. Мелкий порошок довольно хорошо спекается при большой температуре. С помощью методов порошковой металлургии такие головки были сделаны, и они оказались необычайно прочными.

Испытания, проведенные с новыми снарядами, показали, что они с легкостью пробивают самую толстую броню «Тигров» и «Пантер». Массовое производство снарядов с головками из вольфрамовой стали было налажено довольно быстро. И когда на Курской дуге наши артиллеристы встретились с немецкими танками, стало ясно, что планы гитлеровского командования, связанные с неуязвимостью но-



вой техники, провалились. Советские снаряды «внесли» свой вклад в сокрушительное поражение немецких войск.

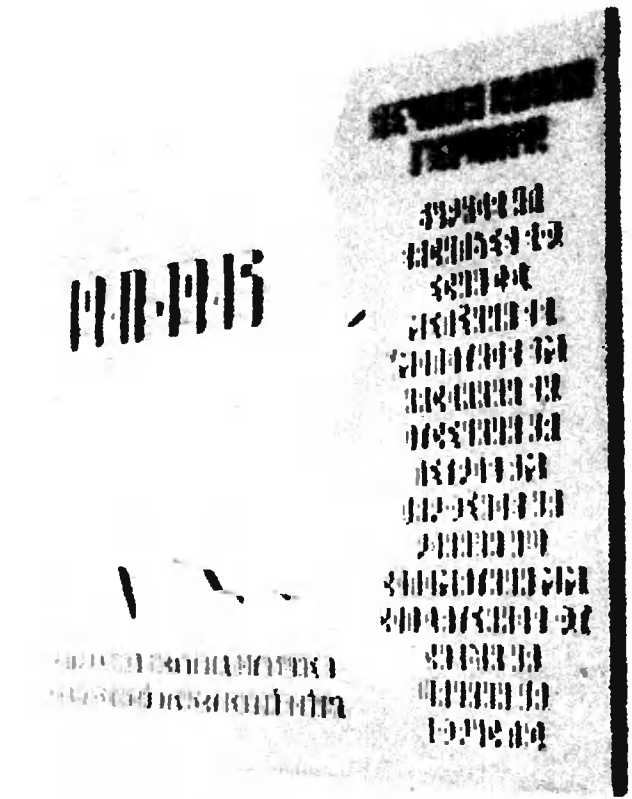
Ну и, конечно, физики не остались в стороне от задачи упрочения брони наших танков. В Советском Союзе физика твердого тела получила широкое развитие, особенно в Ленинградском физико-техническом институте. Директор ЛФТИ академик А. Ф. Иоффе с сотрудниками занимались изучением специальных сталей, в том числе и таких, из которых делается броня.

Поэтому неудивительно, что знания и опыт этих физиков были использованы во время войны. Броня наших танков была в значительной степени усилена и отвечала, пожалуй, самым высоким требованиям науки и техники военного времени. Таким образом, специалисты в области физики металлов непосредственно участвовали в создании грозного оружия Советской Армии, наших бронетанковых сил.

Думаю, что будет интересен короткий рассказ о сухопутных магнитных минах. В начале войны к ученым обратились представители инженерных войск с просьбой выяснить, нельзя ли разработать подобную мину не для кораблей, а для танков. Танк, конечно, весит много меньше корабля, десятки тонн. Возможно, его магнитное поле не очень велико. Надо было проверить.

Эта работа была сделана на Урале. Физикам предоставили несколько танков. Провели измерения магнитного поля под ними на разных глубинах. Оказалось, что поле довольно заметное, и можно было попробовать применить магнитный механизм для подрыва танков. Однако, ставилось важное дополнительное требование: сама мина должна содержать как можно меньше металла. Ведь к тому времени уже были разработаны миноискатели.

Потребовалось придумать специальный сплав для своеобразной стрелки «компас», замыкающей цепь, содержащую небольшую батарейку, сплав, легко намагничивающийся под действием поля танка. В результате работы суммарное количество металла ограничивалось 2—3 граммами на одну мину, а магнетик из сплава был настолько хорош, что позволял подорвать не только танк, но и автомашину. Что уж говорить о паровозах...



Памятная доска, установленная в Институте физических проблем им. С. И. Вавилова АН СССР.

Нельзя не сказать и о физической задаче огромной важности, которую решили физики, оставшиеся во время блокады в Ленинграде. Как известно, довольно долго единственным путем, связывающим город со страной, была Дорога Жизни, проложенная по льду Ладожского озера. Вопрос заключался в том, можно ли и в каких масштабах проводить по дороге грузы ранней зимой или весной, когда озеро только что замерзло или лед начинал подтаивать. Нужно было непосредственно измерять прочность льда, указывать, какой груз он может выдержать.

Ленинградские физики вместе с гидрологами и моряками проделали замечательную работу, с блеском решив эту задачу. Они нашли способ определения прочности ледяного покрова. Прямо на месте, в разных точках Ладожского озера днем и ночью проводились измерения. Именно ими практически руководствовались, выясняя, на каком расстоянии, с каким грузом должны двигаться машины. Без этих указаний было бы много аварий, погибло бы много людей, город недополучил бы продовольствия и боеприпасов. Это пример добросо-

29

Лк. 39  
27/10/42С С С Р  
И К О - И К П С

экз. № 71.

Управление военно-восстановительных и заградительных работ  
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФРОНТА

Гор. \_\_\_\_\_

Тел. № \_\_\_\_\_

№ 195/с.

26 октября 1942 г.

Физико-Техническому Институту  
Академии Наук СССР

Управление Военно-Восстановительных работ Ленинградского Фронта просит организовать изучение физико-механических свойств льда Шлиссельбургской губы Ладожского озера в зиму 1942-43 года.

Цель изучения - использование ледяного покрова для пропуска железнодорожной линии.

Для связи с Управлением Военно-Восстановительных работ и совместной разработки технического задания на производство упомянутых работ просьба выделить своего представителя, которому установить связь с Нач. Технического Отдела Строительства инж. Реховским Д.М.

Адрес Управления Строительства - Пл. Островского, д. № 7, 2-й этаж, комната 40, телефон 4-94-63.

Зам. Начальник Управления  
Военно-Восстановительных работ  
Ленинградского фронта

*Д. М. Реховский* /ЗУБКОВ/

Отп. 2 экз.  
экз. № 1 - адресату  
экз. № 2 - в дело

Письмо Управления военно-восстановительных и заградительных работ Ленинградского фронта в Физико-технический институт АН СССР об организации изучения свойств льда Ладожского озера для прокладки железнодорожной линии.

вестной и интенсивной работы в сложных условиях.

Конечно, можно было бы еще рассказать о помощи, которую оказали физики фронту. Но думаю, что приведенных примеров достаточно, чтобы убедительно показать, как ученые содействовали успеху наших вооруженных сил.

Трудно в небольшой статье говорить и о других науках, занятых военным делом. Упомяну только, что советская школа физико-химиков, возглавляемая академиком Н. Н. Семёновым, долгое время занималась изучением процессов горения и взрыва. Во время войны этим ученым пришлось использовать накопленный багаж знаний для прямых военных це-

лей, активно способствовать нашей исторической победе.

После войны немцы признали, что наши наука и техника были на высоте требований, которые предъявило время. И действительно, советские ученые, в частности физики, самым непосредственным образом исполнили свой патриотический долг помощи фронту.



## Математика и математики в Великой Отечественной войне

*Академик АН УССР В. В. ГНЕДЕНКО*

Сорок лет прошло со дня победы советского народа в Великой Отечественной войне. Неисчислимые жертвы понесла страна во имя независимости, свободы и общественных идеалов: миллионы погибших и раненых, страдания от голода, тысячи разрушенных городов и деревень, сотни тысяч угнанных на фашистскую каторгу. Несмотря ни на что советский народ выстоял и победил.

### На защиту Родины

С первых дней войны математики принимали участие в защите страны: призывались в армию, записывались в народное ополчение, шли на фронт добровольцами. В самые тяжелые для страны дни они показали себя верными сыновьями Родины, способными на самопожертвование и готовыми отдать жизнь во имя свободы Отчизны. И действительно, многие из тех, кто ушел на фронт, не возвратились и не приступили к своей любимой работе. Среди погибших было много талантливых математиков, подававших большие надежды, способных внести большой вклад в прогресс наших знаний.

В ту пору я работал в Московском университете, был доцентом кафедры теории вероятностей и ученым секретарем Института математики МГУ. Как только стало из-

вестно о нападении фашистской Германии на наше Отечество, всюду на заводах и в учреждениях прошли митинги, и возникло общенародное движение по записи в народное ополчение. На нашем механико-математическом факультете в ополчение записались практически все студенты и аспиранты и подавляющее большинство ассистентов, доцентов и профессоров, в том числе и те, кто по возрасту и состоянию здоровья был освобожден от воинской службы. Позднее некоторые ополченцы были вычеркнуты из списков, так как они имели профессорские звания или степени доктора. В эту категорию попал и я, поскольку к тому времени мной была защищена докторская диссертация. В результате мне пришлось не с оружием в руках защищать страну, а участвовать в создании этого оружия, а также в разработке методов рационального его использования.

Большое число математиков, как мы уже отмечали, были мобилизованы или ушли на фронт добровольцами. Они храбро воевали и честно исполняли свой гражданский долг. Несомненно, что при этом страна потеряла огромное число талантливой молодежи, которая могла бы стать гордостью отечественной науки. Об этом мы можем судить, во-первых, по тому, что среди возвратившихся после участия в сражениях Великой Отечественной войны значительное число стало крупными учеными — профессорами, членами-корреспондентами и академиками Всесоюзной и республиканских академий наук. Достаточно назвать такие имена как академики Ю. В. Линник, Ю. А. Митропольский, Г. Г. Черный, Н. П. Еругин, О. С. Парасюк, чтобы убедиться в этом. А во-вторых, каждый из университетов потерял многих молодых ученых, уже сумевших проявить себя и обещавших в будущем очень многое, но не вернувшихся с войны. Так, Московский университет потерял талантливых молодых математиков Г. М. Бавли, М. В. Бебутова, Н. Б. Веденисова, В. Н. Засухина и многих, многих других. Они могли бы стать гордостью нашей науки, но война прервала и зачеркнула развитие так славно начатого ими научного пути.

## В народном ополчении: бой под Ельней

Помимо преподавателей, аспирантов и студентов, получивших мобилизационные извещения уже в первые дни войны и попавших в регулярные воинские части, механико-математический факультет Московского университета дал 213 человек в 8-ю Краснопресненскую дивизию народного ополчения. Все они были зачислены в 975-й артиллерийский полк этой дивизии и после короткого обучения уже в августе заняли оборонительный рубеж на ржевско-вяземском направлении. Вместе со всеми наши товарищи создавали оборонительный рубеж: рыли окопы, противотанковые рвы, минные поля, устанавливали орудия. Но на фронте не все происходит так, как предполагает обороняющийся. В начале октября положение на ельнинском направлении резко обострилось, поскольку немцы сосредоточили здесь большие свежие силы и начали наступательную операцию. В связи с этим командование фронтом передало 8-ю Краснопресненскую дивизию из 32-й в 24-ю армию и срочно перебросило ее с подготовленных позиций в район деревни Уварово, расположенной несколько южнее Ельни. К сожалению, подготовленных позиций там не оказалось и пришлось задерживать врага буквально «с марша». Дивизия выполнила боевую задачу: она задержала врага на несколько дней и тем самым оказала значительную помощь обороне Москвы. По сохранившимся сведениям это сражение дорого обошлось оккупантам: около 45 тысяч солдат и офицеров они потеряли под Ельней в результате стойкой обороны советских солдат. Но и мы заплатили за это дорогую цену: около трети ополченцев 8-ой дивизии погибли в этих боях. Среди них были аспиранты или уже защитившие диссертации А. И. Герчиков, М. Е. Глезерман, В. Н. Засухин, И. Р. Лепехин, Х. М. Мильштейн, С. С. Кудашев, С. Я. Карнов, А. Т. Павлов, М. И. Песин и ряд других. Трудно переоценить тяжесть этой потери для страны и для советской науки, а нам, преподавателям факультета, знавшим их лично, ценившим их способности и увлеченность наукой, эта потеря особенно горька.

Академик и директор Института механики МГУ Г. Г. Черный рассказывал, что 975-й артиллерийский полк 5 октября отбивал ожесточенные атаки наседавшего со всех сторон противника. Одно за другим выходили из строя орудия. Когда был отдан приказ об отходе на новую позицию, из них осталось лишь шесть. Отходить к лесу пришлось по открытому полю под огнем противника; еще четыре орудия были выведены из строя. Расчеты оставшихся двух орудий изготовились к бою, а пехота залегла рядом, на опушке, в наспех вырытых окопчиках. В это время разведка донесла, что вблизи от леса движется большая колонна противника — машины с солдатами, самоходные орудия, минометы, боеприпасы. Было принято немедленное решение — атаковать наличными средствами беспечного противника. Наводчиком одного из орудий был Г. Г. Черный, другого — также мехматовец И. Степанов. Тщательное прицеливание, залп и оба снаряда разорвались в колонне. Дальше бешеный огонь по противнику, разбитые машины, мотоциклы, уничтоженные солдаты. Однако растерянность врага прошла, и в ответ полетели снаряды и мины. Дуэль длилась до тех пор, пока у наших оставались снаряды.

## Медсестры, летчицы и артиллеристы

Многие студентки после прохождения двухмесячных курсов медсестер были направлены в госпитали, медсанбаты и непосредственно на передовую. Кроме того, студентки университета откликнулись на призыв известной летчицы Героя Советского Союза Марины Расковой и стали штурманами и летчицами, в частности, 46-го гвардейского полка ночных бомбардировщиков. Летали эти летчицы на тихоходном и незащищенном от огня самолете «У-2», но наносили противнику весьма значительный ущерб. Пяти летчицам выпускницам мехмата было присвоено звание Героя Советского Союза. Вот их имена: Е. Руднева, Е. Пасько, Р. Гашева, А. Зубкова, Е. Рябова. Еще три выпускника факультета были Героями Советского Союза — Г. Барыков, Г. Волохов, Л. Ратушная.



Герой Советского Союза Екатерина Рябова перед боевым вылетом.



Добровольцем пошел в Армию и профессор А. А. Ляпунов и, как многие мехматовцы, стал артиллерийским офицером. Он не только храбро воевал, но и вносил много ценного в правила стрельбы. Но здесь он использовал свой опыт математика, которому свойственно искать самые лучшие решения. Его предложения позволили увеличить эффективность стрельбы. За работы в области кибернетики, теории множеств и программирования А. А. Ляпунов уже после войны был избран член-корреспондентом АН СССР.

Математики нашей страны в период тягчайших испытаний проявили себя как подлинны патриоты, проявляли величайшее мужество, были храбрыми и расчетливыми воинами.

#### Математические задачи — для фронта

Мы должны преклоняться перед выдержкой, самоотверженностью и верностью Отчизне, которую проявляли математики-воины. Однако нельзя забывать и о другом вкладе математиков в победу советского народа над сильным и коварным врагом. Этот вклад состоит в использовании тех специфических знаний и умений, которыми обладают математики. Значение этого фактора особенно важно в наши дни, когда война стала, в первую очередь, соревнованием разума, изобретательности и точного расчета. Дело в том, что для военных действий привлекаются все достижения естествознания, а вместе с ними и математика во всех ее проявлениях. Создание атомного и ракетного оружия потребовало не только

использования физических законов, но и обширных математических расчетов, создания новых математических моделей и даже новых ветвей математики. Без таких предварительных математических исследований не создается ни одна техническая система и, чем она сложнее, тем разнообразнее и шире ее математический аппарат. Для примера, крейсер представляет собой такую сложную техническую систему. Прежде чем начать его постройку, необходимо выявить геометрические обводы корпуса судна, чтобы при движении не создавались дополнительные сопротивления и чтобы одновременно он был послушен управляющим воздействиям руля. Предварительно необходимо обеспечить живучесть корабля, надежность его управления, рассчитать влияние на остойчивость расположения различного рода масс — машин, орудий, торпедных аппаратов и пр. Но и этого мало — требуется обеспечить связь со всеми боевыми единицами корабля, то есть создать эффективную систему управления кораблем и его оружием.

Мы перечислили лишь ничтожную долю тех задач, которые должен решить математик, прежде чем корабль можно начать строить. Но серьезные задачи необходимо решать и в период его эксплуатации — штурманские расчеты, расчеты стрельбы и т. д.

#### Совершенствование военной техники

В период Великой Отечественной войны техника была разнообразной и сложной. Она также требовала широкого использования математических

Академик М. А. Лаврентьев  
за изучением пробивного дей-  
ствия взрывчатых веществ  
(1944 г.).



расчетов для ее изготовления и эксплуатации. Увеличение скорости полета самолетов требовало не только повышения мощности двигателей, но и выбора оптимального профиля фюзеляжа и крыльев, а также решения многих других вопросов. В России над этими вопросами еще с прошлого века работал ряд ученых и в первую очередь Н. Е. Жуковский (1847—1921), названный В. И. Лениным отцом русской авиации. Он закономерно считается основоположником новой математической науки — *аэродинамики*, в которой ему удалось создать ряд сильных методов исследования и решить многочисленные актуальные задачи, основать большую научную школу, состоящую из ближайших учеников по университету и старейшему высшему техническому заведению Москвы — Московскому высшему техническому училищу. Жуковский заложил основы Военно-воздушной академии, получившей впоследствии его имя, а также Центральный аэрогидродинамический институт. Это научное учреждение долгие годы работало под руководством одного из ближайших учеников и сотрудников Н. Е. Жуковского — С. А. Чаплыгина (1869—1942) и объединила многих выдающихся исследователей — М. В. Келдыша (1911—1978), В. В. Голубева (1884—1954), М. А. Лаврентьева (1900—1980) и др. Теоретический отдел разрабатывал многие важные проблемы, в том числе и для военной авиации. Многие из

этих разработок пригодились и были широко использованы для создания новых систем истребителей, штурмовиков и бомбардировщиков, обладавших повышенной маневренностью, скоростью, надежностью.

Большое значение получили теории двух явлений — *штопора* и *шимми* (или *флаттера*), представлявших в ту пору основную опасность для авиаторов. Как правило, самолет, попавший в состояние штопора или шимми (особые вибрации самолета, приводившие к его разрушению) уже не могли из него выйти. Теорию этих явлений создал М. В. Келдыш (впоследствии президент Академии наук СССР, главный теоретик космонавтики). Однако он пошел дальше и на основании теории сделал заключения о том, как устранять эти явления. В результате практика полетов получила надежное средство для борьбы с шимми и штопором и за все время войны практически не было в нашей авиации гибели самолетов и летчиков по этим причинам. Переоценить результаты этих исследований невозможно, поскольку они помогли не только сохранить жизнь летчиков и самолеты, но и позволили летать на больших скоростях.

### Теория стрельбы

Традиционная область деятельности ученых нашей страны — исследование артиллерийских систем.

Этим занимались М. В. Остроградский (1801—1862) и П. Л. Чебышёв (1821—1894), и последующие поколения ученых. Проблемы пристрелки, разработанные еще в XIX веке в связи с появлением новых типов артиллерии потребовали в период Великой Отечественной войны дополнительных исследований и составления таблиц. Стрельба с самолета по самолету и по наземным целям также привела к математическим задачам, которые нужно было срочно решить. Ими занимались упорно как специалисты в области артиллерии, так и математики. Проблемы бомбометания привели к необходимости составления таблиц, позволяющих находить оптимальное время для сброса бомб на цель, область, которую накроет бомбовой удар. Такие таблицы были составлены еще до начала войны, но для самолетов, обладающих большими скоростями. Во время войны выявилась полезная возможность использования тихоходных учебных самолетов для ночных бомбежек. Были созданы специальные полки ночных бомбардировщиков, но для них не было своевременно создано таблиц бомбометания. Возникла срочная задача производства соответствующих расчетов. Таблицы были созданы и они оказали несомненную помощь нашим летчикам и летчицам.

Интересная задача возникла у моряков в связи с желанием увеличить вероятность попадания в цель при торпедном залпе. Возникла идея за счет искусственного рассеивания увеличить эту вероятность. Этой задачей занялся один из крупнейших наших математиков академик А. Н. Колмогоров. Ему удалось найти полное решение задачи и довести его до практического использования. Несомненно, что какую-то долю успехов наших моряков следует отнести и на счет этой решенной Колмогоровым задачи. Позднее его выводы были перенесены и на проблемы, связанные со стрельбой зенитной артиллерии по самолетам. Вообще нужно сказать, что актуальная математическая задача, решенная в одной практической ситуации, очень быстро находит и другие применения, порой очень далекие от первоначального направления исследований.

## Статистический контроль в военном производстве

Имеется еще один аспект работы советских математиков на помощь фронту, о котором нельзя умалчивать — это работа по организации производственного процесса, направленная на повышение производительности труда и на улучшение качества продукции. Здесь мы столкнулись с огромным числом проблем, которые по самому их существу нуждались в математических методах и в усилиях математиков. Мы затронем здесь лишь одну проблему, получившую наименование контроля качества массовой промышленной продукции и управления качеством в процессе производства. Эта проблема со всей остротой возникла перед промышленностью уже в первые дни войны, поскольку прошла массовая мобилизация и квалифицированные рабочие стали солдатами. Им на смену пришли женщины и подростки без квалификации и рабочего опыта.

Я вспоминаю такой случай: мне пришлось быть на одном из приборостроительных заводов в Свердловске. Он изготовлял крайне необходимые приборы для авиации и артиллерии. У станков я увидел практически только подростков 13—15 лет. Увидел я также огромные кучи бракованных деталей. Сопровождавший меня мастер пояснил, что эти детали выходят за пределы допуска и поэтому непригодны для сборки. А вот если бы удалось собрать из этих «запоротых» деталей пригодные приборы, мы бы смогли сразу же удовлетворить потребности на месяц вперед.

Слова мастера не давали мне покоя. В результате общения с инженерами завода родилась мысль разбить детали на 6 групп по размерам, которые уже было бы возможно сопрягать между собой. В шестую группу входили детали совершенно непригодные для сборки. Исследования показали, что так собранные приборы оказались вполне пригодными для дела. Они обладали одним недостатком: если какая-либо деталь выходила из строя, то ее можно было заменить лишь деталью той же группы, из деталей которой собран прибор. Но в ту пору и для тех целей, для которых были предназначе-

ны приборы, можно было обойтись заменой приборов, а не деталей. Нам удалось успешно использовать «зава-лы» испорченных подростками де-талей.

Задача контроля качества изготов-ленной продукции состоит в следую-щем. Пусть изготовлено  $N$  изделий, они должны удовлетворять некото-рым требованиям. Скажем, снаряды должны быть определенного диамет-ра, не выходящего за пределы от-резка  $[D_1, D_2]$ , иначе они будут не-пригодны для стрельбы. Они должны обладать определенной кучностью при стрельбе, иначе будут затруднения при стрельбе по цели. И если с пер-вой задачей справиться легко — нуж-но замерить диаметры изготовленных снарядов и отобрать те из них, которые не удовлетворяют требова-ниям, то с другим требованием поло-жение значительно сложнее. Действи-тельно, чтобы проверить кучность стрельбы, необходимо провести стрельбы. А что же останется после испытаний? Испытания нужно произ-вести так, чтобы подавляющая часть продукции осталась пригодной для дальнейшего использования. Мы столк-нулись с основным требованием: по испытанию малой части изделий на-учиться судить о качестве всей пар-тии. Методы, которые были для этой цели предложены, получили название *статистических*. Их теория берет свое начало с одной работы 1848 года академика М. В. Остроградского. Позднее этой задачей занимались профессор В. И. Романовский (1879—1954) в Ташкенте и его ученики. Во время войны их совершенствованием занялся А. Н. Колмогоров и его уче-ники.

Задача, о которой только что было рассказано, обладает одним дефектом в самой ее постановке: партия про-дукции уже изготовлена и нужно сказать, можно ее принять или же следует ее отвергнуть? Но, спраши-вается, зачем же изготовлять пар-тию, чтобы ее затем браковать? Нельзя ли так организовать произ-водственный процесс, чтобы уже при изготовлении поставить заслон для изготовления некачественной про-дукции? Такие методы были предло-жены и получили название *статисти-ческих методов текущего контроля*. Время от времени со станка берутся

несколько (скажем пять) только что изготовленных изделий и замеряются параметры их качества. Если все эти параметры находятся в допустимых пределах, то производственный про-цесс продолжается, если же хотя бы одно изделие выходит за пределы до-пуска, то подается сигнал о необ-ходимой переналадке станка или о смене режущего инструмента. Какое отклонение параметра от номинала допустимо, чтобы вся партия была изготовлена качественно? Это требует специальных расчетов.

После окончания войны выясни-лось, что аналогичные исследования проводили математики США. Они подсчитали, что результаты их рабо-ты принесли за годы войны стране миллиардную экономию. То же самое можно сказать и о работах советских математиков и инженеров.

\* \* \*

До сих пор нет сводного труда, который бы показал как много ма-тематики дали фронту для победы, как их исследования помогали совер-шенствовать оружие, которое исполь-зовали воины в боях\*). Этот пробел следует восполнить как можно быст-рее, поскольку многих из тех, кто это делал, уже нет в живых, поскольку человеческая память несовершенна и многое забывается. А нам никак нель-зя забывать о том, что подвиг на-рода в Великой Отечественной войне не ограничивается только славными делами фронтовиков, что основы побе-ды ковались и в тылу, где руками рабочих и их разумом, руками и ра-зумом инженеров и ученых создава-лась и совершенствовалась военная техника. Нельзя нам забывать и то-го, что по многим параметрам к концу войны наши танки, самолеты, артиллерийские орудия стали со-вершеннее тех, которые противопоставлял нам враг. Нельзя забывать, что в конце войны мы вынуждены были вплотную заняться созданием собственного атомного оружия, а для этого пришлось объединить интеллек-туальные усилия физиков, химиков, технологов, математиков, металлур-гов и самостоятельно пройти тот путь,

\*) Есть, однако, книга на более общую тему (см. [3]).



который уже был пройден США и их западными союзниками. Мы его прошли сами, тогда как в США работали лучшие ученые со всей Европы — Англии, Франции, Италии, Дании, Германии (эмигранты), Польши, Венгрии и, конечно, самих Соединенных Штатов Америки.

Со времени Победы прошло сорок лет. Советские математики многое дали восстановлению и развитию народного хозяйства, а также прогрессу теоретической математики. К сожалению, и теперь положение в мире таково, что страна, а вместе с ней и математики, вынуждены уделять внимание разработке проблем оборо-

ны. Однако это не самоцель, а вынужденная необходимость. Каждый же из нас мечтает о том времени, когда человечество забудет о войнах и о подготовке к ним.

#### Литература

1. Б. В. Гнеденко. Математика и оборона страны. (Математика в школе, 1978, № 2)
2. Б. В. Гнеденко. Математика и контроль качества продукции. (М.: Знание, серия «Математика и кибернетика», № 11)
3. Б. В. Левшин. Советская наука в годы Великой Отечественной войны. (М.: Наука, 1983)
4. И. Пирогов, И. Тюлина. Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны. («Квант», 1980, № 5, с. 10)

## Призеры конкурса «Задачник «Кванта»

По итогам проверки решений задач из Задачника «Кванта» (в дополнение к списку победителей конкурса, опубликованному в «Кванте» № 3 за 1985 год) награждаются Дипломом и значком журнала «Квант»

#### По математике

- Н. АГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.  
 Р. АЛЕКСЕЕВ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.  
 Я. АЛИЕВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.  
 А. БАРАБАШ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 А. БАТЫРЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.  
 Р. ВИДГОЛ — Баку, с. ш. № 175, 9 кл.  
 Г. АГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.  
 В. ГОРОДНИЦКИЙ — Днепрпетровск, с. ш. № 43, 10 кл.  
 Н. ГРИГОРЬЕВА — Андропов, с. ш. № 33, 9 кл.  
 Л. ИВАНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.  
 П. КИРИЛИН — Дубна, с. ш. № 10, 10 кл.  
 А. КИСЕЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.  
 С. КЯРАС — Молетай, с. ш. № 2, 10 кл.  
 С. МИНАЕВ — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.  
 В. ПОРОШИН — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.

- Т. РАДЬКО — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 9 кл.  
 Е. РОМАНОВ — Димитровград, с. ш., № 25, 10 кл.  
 С. СТАРЦЕВ — Уфа, с. ш. № 11, 10 кл.  
 В. СУДАКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.  
 М. ТЕЙТЕЛЬ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 А. ЧЕРЕВАТЫИ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.  
 С. ШЕИНИН — Молодечно, с. ш. № 7, 9 кл.

#### По физике

- В. БАРЗЫКИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.  
 О. ВАСИЛЬЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.  
 И. ГАВРИК — Часов-Яр, с. ш. № 17, 10 кл.  
 В. ГАЛУХИН — Рязань, с. ш. № 14, 10 кл.  
 В. ГУСЕВ — Красноярск, с. ш. № 3, 10 кл.  
 И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 А. КЛИМАЧЕВ — Минск, с. ш. № 116, 10 кл.  
 С. МАШКЕВИЧ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 К. МОСЕЙЧЕВ — Зеленоград, с. ш. № 609, 10 кл.  
 С. МЯГЧИЛОВ — Свердловск, с. ш. № 16, 9 кл.  
 С. НИКОНЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 А. ПЕРЕПЕЛИЧНЫЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.  
 Ю. РЫБАЛОЧКА — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.  
 А. СОМОВ — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.  
 Г. СПИВАК — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.  
 В. ТАРТАКОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 И. ТЕРЕЗ — Симферополь, с. ш. № 7, 9 кл.  
 А. УМНОВ — Миасс, с. ш. № 6, 10 кл.  
 Л. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.  
 В. ФУРМАН — Ташкент, с. ш. № 19, 10 кл.  
 Г. ШВЕЦ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.

# Свидание с кометой

Доктор  
физико-математических  
наук  
Л. С. МАРОЧНИК

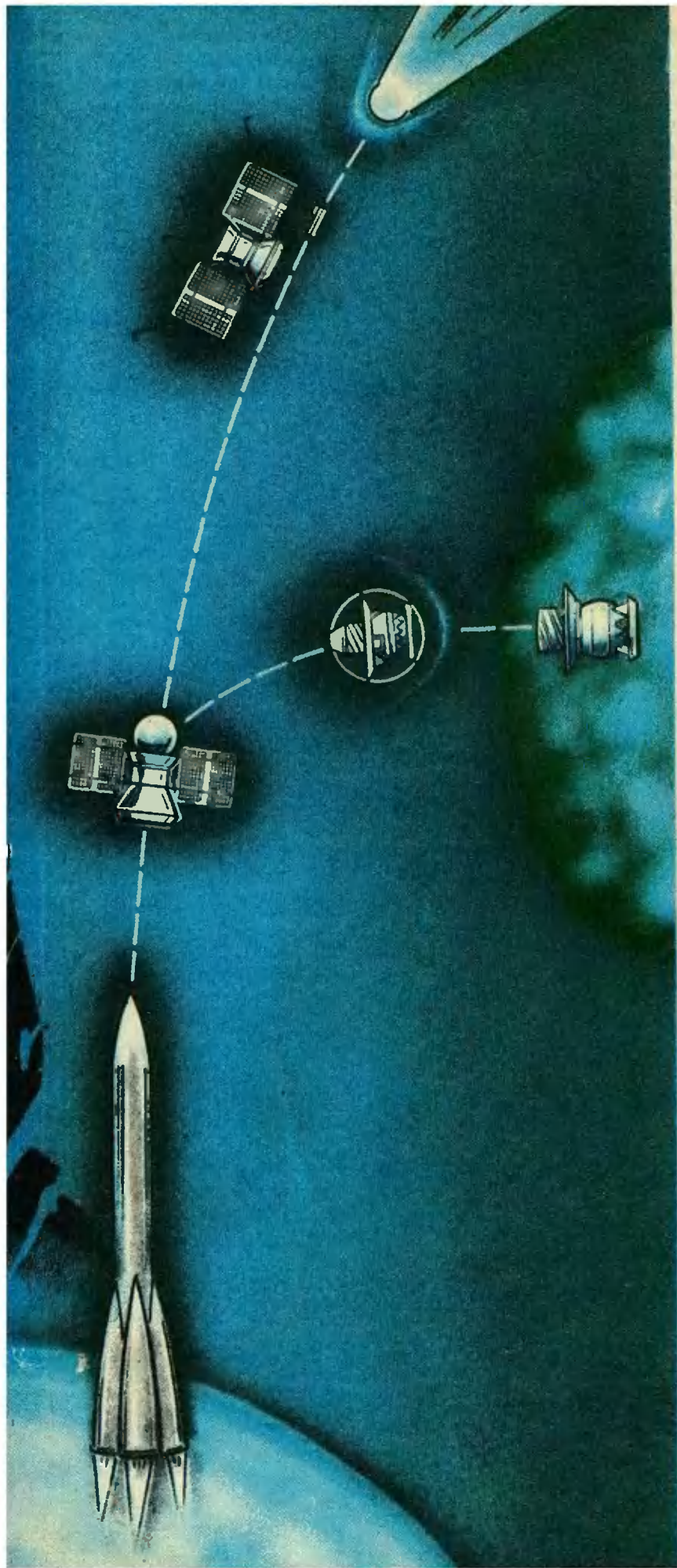
Вступление от редакции

В июльском номере нашего журнала за 1982 год была опубликована статья Л. С. Марочника «Кометы». В ней рассказывалось о том, что представляют собой кометы, что в физике комет ясно и что не ясно на сегодняшний день, чем интересны для ученых кометы, на какие вопросы они, по мнению исследователей, могут дать ответы.

В той статье была рассказана «биография» одной из самых знаменитых комет — кометы Галлея; биография довольно драматическая, с ней связаны имена многих замечательных ученых. Там же говорилось о проектах экспедиций к комете Галлея, о том, какие научные цели будут преследовать эти экспедиции.

Тогда, в 1982 году, все еще было впереди — и старты, и встречи космических миссионеров со знаменитой кометой. Сегодня до встреч еще далеко — они произойдут в марте 1986 года, а вот первый старт уже состоялся. Две советские космические станции «Вега-1» и «Вега-2» успешно стартовали 15 и 21 декабря 1984 года. Название станций (как и название всего проекта) — «Вега» — это сокращение от полного названия Международной экспедиции «Венера — комета Галлея». В проекте «Вега» участвуют Австрия, Народная Республика Болгария, Германская Демократическая Республика, Венгерская Народная Республика, Польская Народная Республика, Франция, СССР, Чехословацкая Социалистическая Республика, Общество имени Макса Планка (ФРГ). Проект «Вега» предусматривает совмещение исследований Венеры и кометы Галлея.

В серии «Библиотечка «Квант» готовится к печати книга «Свидание с кометой». Ниже мы публикуем небольшие отрывки из этой книги, подготовленные ее автором, Л. С. Марочником, для читателей «Кванта».





## 1. Выбор цели

Итак, мы стартуем к комете Галлея. Прежде всего, почему именно к ней? Очевидно, готовить экспедиции нужно заранее — это многолетняя трудовая работа; но заранее можно готовиться только к встрече с какой-либо знакомой кометой, периодичность появления которой изучена. Естественно, это — короткопериодические кометы. С другой стороны, с точки зрения физических интересов ясно, что комета должна быть активной — яркой, с бурным выделением газов, «пышным» хвостом, развитой атмосферой, «серьезной» ионосферой и т. п. Активными бывают, как правило, молодые кометы, впервые подлетающие к Солнцу, но такие «небесные гости», внезапно появляясь в поле зрения, стремительно проносятся через перигелий и вновь уходят в «небытие». Подготовить космический аппарат и запустить его навстречу такой комете невозможно. (В лермонтовском «Демоне» есть строчки о том, как

«...бегущая комета

Улыбкой ласковой привета

Любила поменяться с ним...»

Это как раз та самая ситуация — ничего, кроме «привета», ни космический аппарат, ни комета не успеют передать друг другу.)

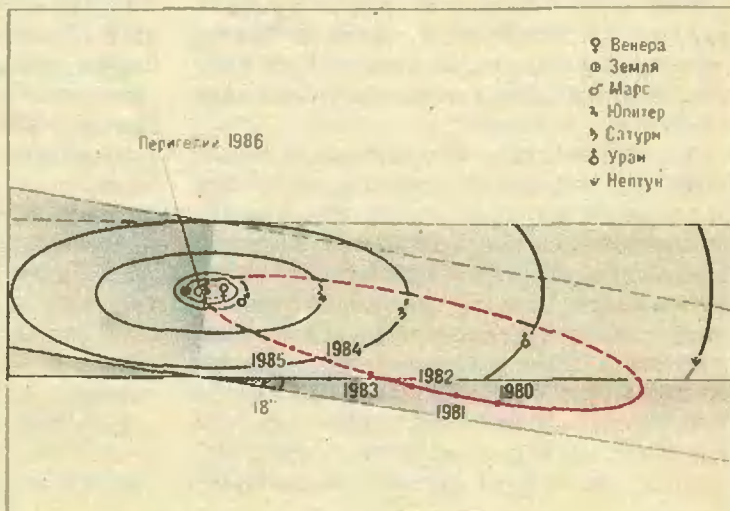
Поэтому все-таки приходится ориентироваться на короткопериодические кометы. Но такие кометы, как правило, не слишком активны — часто проходя вблизи Солнца в течение своей «жизни», они теряют летучие вещества и становятся малоинтересными, свидания с ними не вызывают особого энтузиазма.

Комета Галлея в этом смысле является исключительной. Несмотря на то, что ее появления вблизи Солнца регистрируются человечеством уже более 2000 лет, а в действительности на своей нынешней (или близкой к нынешней) орбите она пребывает, возможно, более 100 тысяч лет, эта комета продолжает оставаться весьма активной. Трудно сказать, в чем секрет ее молодости, но, может быть, мы узнаем это после первого свидания.

## 2. Дороги, которые мы выбираем

Проект «Вега» возник потому, что его автор — известный советский физик академик Р. З. Сагдеев — обратил внимание на удачное расположение Венеры в эпоху прохождения кометой Галлея ее перигелия. Положение Венеры случайно оказалось таким, что возникла возможность совместить, образно говоря, «приятное с полезным». В декабре 1984 года в СССР планировался запуск автоматических станций в сторону Венеры. Но оказалось, что небольшого маневра в поле тяготения Венеры могло бы хватить на то, чтобы направить станцию, выполнившую свои исследовательские «венерианские задачи», к комете Галлея. Расчеты показали, что идея осуществима, и проект «Венера — комета Галлея» обрел жизнь.

Обратимся теперь к «дорогам, которые мы выбираем». На языке науки речь идет о стратегии выбора траектории полета космических аппаратов к комете Галлея. Стратегия эта определяется современным уровнем возможностей космической техники. Дело в том, что Земля летит по своей



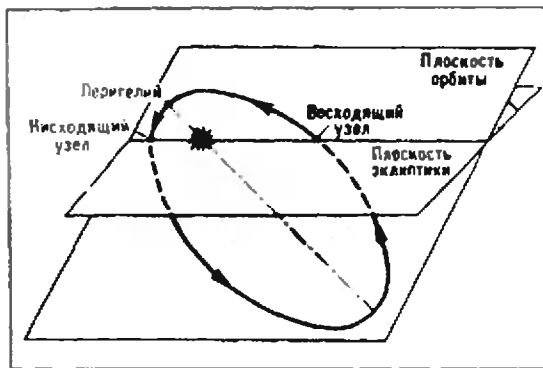
Взаимная ориентация орбит планет и кометы Галлея. В июне 1985 года, когда «Вега» встретится с Венерой, комета будет между орбитами Юпитера и Сатурна.

гелиоцентрической орбите со скоростью около 30 км/с. Стартовые скорости, которые при современном уровне техники могут быть сообщены космическому аппарату, находящемуся на орбите спутника Земли, — порядка 3—5 км/с. Такие малые по отношению к орбитальной скорости Земли стартовые скорости не позволяют организовать встречу с кем бы то ни было далеко от плоскости эклиптики. Это обстоятельство определяет время запуска аппаратов к Венере и момент начала гравитационного маневра, направляющего аппарат от Венеры к комете.

Венера вращается вокруг Солнца быстрее Земли в 1,6 раза. Поэтому «догнать» Венеру космический аппарат, запущенный с Земли, не в состоянии. Его надо запускать в тот период, когда Венера начинает «догонять» Землю в своем гелиоцентрическом вращении. Отсюда возникают «окна» запуска на Венеру длительностью в две недели. «Внутри» этих двух недель нужно оптимально выбрать дату пуска, чтобы космический аппарат подошел к Венере как раз в нужный момент и мог снова «стартовать» — теперь уже к комете.

Плоскость орбиты кометы Галлея наклонена к плоскости эклиптики под углом  $18^\circ$ . Понятно, что встречи возможны лишь вблизи узлов орбиты кометы — восходящего, где она поднимается из-под плоскости эклиптики и переходит в северное полушарие неба, или нисходящего, где она снова уходит после прохождения перигелия под плоскость эклиптики в южное полушарие. Таким образом, точки встречи с кометой Галлея определяются сразу же, так как уровень современной космической техники не допускает других решений этой задачи. Таких точек, однако, две, и следующий вопрос заключается в том, какую из них выбрать.

Из чего следует исходить при решении этого вопроса? Успех физических экспериментов зависит от степени активности кометы в момент встречи. Наблюдения кометы Галлея в 1910 году выявили некую, присущую именно этой комете, особенность: после прохождения перигелия она стала намного активнее, чем при подлете к нему. Это обстоятельство является сильным аргументом в пользу того, чтобы направить кометную миссию в нисходя-



*Некоторые элементы орбиты, плоскость которой не совпадает с плоскостью эклиптики.*

щий узел орбиты. Но есть и другие моменты, которые нужно учитывать, свои pro и contra.

### 3. «Сценарий» экспедиции «Вега»

В Институте космических исследований АН СССР были выполнены на компьютере расчеты оптимальных траекторий полета в восходящий и нисходящий узлы орбиты кометы Галлея. Проанализировав расчетные данные, советские специалисты остановились на следующем сценарии экспедиции.

В конце декабря 1984 года с небольшим интервалом стартуют две станции (для обеспечения надежности). Их программы идентичны, поэтому дальше мы будем говорить об одной (любой) из них. Станция летит к Венере так, чтобы встретиться с ней (июнь, 1985) на втором полувитке своей эллиптической гелиоцентрической орбиты. За двое суток до подлета к Венере происходит разделение станции на спускаемый (СА) и пролетный (ПА) аппараты. Спускаемый аппарат входит в атмосферу Венеры и совершает посадку на ее поверхность. Пролетный аппарат совершает гравитационный маневр в поле тяготения Венеры и направляется на встречу с кометой Галлея. В процессе полета к комете двигатель пролетного аппарата будет включаться несколько раз, так как нужно будет провести несколько коррекций траектории по мере уточнения элементов орбиты кометы при ее приближении к Солнцу.

Вот некоторые «узловые» моменты и количественные данные сценария полета по проекту «Вега».



Старт с Земли: 15 и 21 декабря 1984 года.

Коррекции траектории на трассе Земля — Венера.

Встреча с Венерой: середина июня 1985 года; расстояние Земля — Венера в это время — около 103 млн. км.

Продолжительность полета к Венере — приблизительно 175—180 суток.

Коррекции траектории ПА на трассе Венера — комета Галлея.

Встреча с кометой: первая половина марта 1986 года; расстояние до Земли от точки встречи ПА с кометой — около 173 млн. км.

Относительная скорость сближения ПА с кометой при встрече — 78 км/с.

Общая продолжительность полета к комете — около 450 суток.

Положения основных «действующих лиц» этого сценария в разные моменты показаны на рисунке на второй странице обложки этого номера журнала.

#### 4. Свидание с Венерой

Так же как «театр начинается с вешалки», «Вега» начинается с Венеры. Поэтому разговор о сценарии проекта без хотя бы краткого описания подлета к Венере и предполагаемых исследований этой планеты невозможен.

К тому моменту, как вы будете читать эти строки, большая часть «первого акта» сценария уже будет позади. Многоступенчатая ракета-носитель вывела космическую станцию вместе с так называемой разгонной ступенью на орбиту искусственного спутника Земли. На первом витке орбиты включилась разгонная ступень, и станция перешла на траекторию полета к Венере.

За двое суток до подлета к планете, как уже говорилось, «Вега» разделяется на спускаемый аппарат и пролетный аппарат. При движении в атмосфере Венеры от спускаемого аппарата отделяется аэростатный зонд. Согласно научной программе зонд должен дрейфовать в атмосфере и передавать на Землю информацию о скорости венерианских атмосферных течений, температуре, давлении и других параметрах вдоль своей траектории. Для приема этой информации на Земле будет использована международная сеть радиотелескопов. Поэтому и спускаемый аппарат, и аэростатный зонд должны входить в атмосферу Венеры так, чтобы и на входе, и в течение всего времени дрейфа (1—2 суток) оставаться на видимой с Земли части диска Венеры.

Со спускаемого аппарата информа-

ция может передаваться на Землю только через ретранслятор. Таким ретранслятором будет служить пролетный аппарат. Тогда получается, что требования, которые предъявляет к нему комплексный характер эксперимента «Вега», взаимно противоречивы. Пролетный аппарат должен ввести в атмосферу Венеры спускаемый аппарат и аэростатный зонд, не имеющие собственных систем управления полетом в космосе, вполне определенным образом, но при этом сам он не должен входить в атмосферу планеты — ведь ему еще лететь дальше. Кроме того, во время работы спускаемого аппарата на Венере пролетный аппарат должен находиться в зоне связи, чтобы ретранслировать получаемую информацию на Землю. Оказывается, что при этом пролетный аппарат не может выйти на траекторию полета к комете Галлея. Отсюда и возникает необходимость в гравитационном маневре — выполнив свои функции, пролетный аппарат должен включить реактивную тягу и изменить свою траекторию, чтобы направиться к комете.

#### 5. От Венеры — к комете

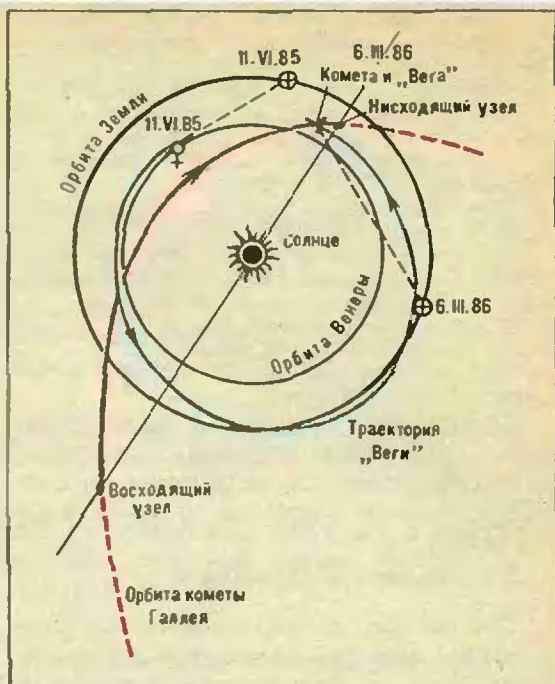
Через 2—4 недели после пролета Венеры планируется произвести первую коррекцию и перевести пролетный аппарат на траекторию полета к комете Галлея. Здесь начинается специфика, с которой специалистам пока не приходилось сталкиваться. Дело в том, что впервые в мире осуществляется полет к небесному телу, параметры движения которого в момент старта с требуемой точностью не будут известны. Довольно часто специалисты ошибались в прогнозах момента прохождения кометой ее перигелия, даже при использовании современных математических методов вычислений. Поэтому совершенно необходимо постоянное уточнение элементов орбиты кометы по наземным наблюдениям уже в ходе полета к ней. По этой причине сейчас создана точная небесно-механическая теория движения кометы Галлея. Основанная на анализе данных о ее движении в 1759, 1835, 1910 годах, эта теория показала очень хорошее согласие с наблюдениями.

Всего на участке полета Венера — комета будет произведено три коррекции. О первой уже говорилось. Вторая будет осуществлена в середине полета и третья — за 2—4 недели до подлета к комете. Первый сеанс научных исследований начинается за двое суток до подлета, когда расстояние до кометы будет составлять 14 млн. км. Второй сеанс начинается за одни сутки до подлета на расстоянии 7 млн. км. Третий сеанс начинается при встрече с кометой.

Вопрос, остающийся достаточно неопределенным и, соответственно, всех волнующий, — это расстояние от ядра кометы Галлея, на котором пройдет космический аппарат. Здесь все определяется точностью, с которой известна орбита кометы, а эта точность не слишком велика. Последнее обстоятельство связано с тем, что в районе перигелия комета испытывает значительные негравитационные ускорения. Они вызваны, главным образом, действием реактивных сил, которые возникают при мощном испарении льдов, входящих в состав ядра кометы.

Если основываться на предыдущих прохождении кометы Галлея, то прогноз местоположения узла ее орбиты можно сделать с совершенно неудовлетворительной точностью — порядка  $10^6$  км. А диаметр головы кометы Галлея всего лишь  $4 \cdot 10^5$  км. Так легко и промахнуться, пролететь мимо кометы. Если, однако, включить в расчеты уже ведущиеся наблюдения за движением этой кометы, то точность, с которой специалисты программы «Вега» надеются попасть в нее, повышается. Сейчас предполагается, что космический аппарат пролетит на расстоянии приблизительно  $10^4$  км от ядра кометы.

И еще один очень важный вопрос: пролетит ли аппарат без повреждений через атмосферу кометы? По мере приближения к ядру плотность кометной пыли заметно увеличивается, и, хотя масса пылинок мала, скорости, с которыми они будут «налетать» на аппарат, огромны — можно считать, что они равны относительной скорости аппарата и кометы при встрече, то есть близки к 80 км/с. Так что кинетическая энергия налетающих пылинок будет велика, а от нее, понятно, в прямой зависимости находятся размеры возможных повреждений.



4

По такой схеме должен проходить второй этап полета — от Венеры до кометы Галлея.

Эти соображения заставили создателей корабля продумать надежные меры защиты. По расчетам советских и зарубежных специалистов вероятность того, что повреждение произойдет, составляет лишь несколько процентов. Вероятность весьма небольшая, но все же не равная нулю.

В полетах к планетам Солнечной системы, где метеорная опасность неизмеримо ниже, научная и служебная информация записывается на запоминающее устройство, с которого она передается на Землю в сеансы связи. От этой практики пришлось отказаться, так как лучше иметь «синицу в руках, чем журавля в небе»: если произойдет повреждение научной или служебной аппаратуры, то это поставит под удар успех экспедиции. Поэтому в проекте «Вега» предусмотрена прямая передача информации на Землю. Конечно, это потребовало отказа от сложившихся технических решений. Например, информативность служебного радиокомплекса, ответственного за отправку на Землю данных научных измерений, увеличена более чем в 20 раз. Радиоприемная антенна, установленная на пролетном аппарате, при пролете через атмосферу кометы Галлея будет все время направлена на Землю.

## Заключение от автора

Разумеется, мой рассказ — это весьма беглый обзор «насуточных» проблем и трудностей, с которыми столкнулись специалисты при проектировании первых в истории человечества миссий к кометам. Очень многое осталось «за бортом» — ведь нельзя объять необъятное (а тем более в журнальной статье). Среди этого «многого» — и уже решенные научно-технические проблемы, связанные с проектом «Всга», и те вопросы, которые ученые «задают» комете... Но на одном «философском» вопросе, который, наверное, возникал не раз, я хотел бы немного задержаться.

Зачем все это? Не лучше ли потратить деньги на хозяйственные нужды? Построить, например, больше жилых домов, заводов, санаториев? Можно ответить коротко: не хлебом единым жив человек. Но можно и подробнее.

Прогресс в прикладных областях науки и техники, тех, которые создают станки, подъемные краны, хлебоуборочные машины, производят медикаменты и т. п., невозможен без прогресса в фундаментальных исследованиях, хотя на первый взгляд

они не связаны между собой.

Искусственные спутники Земли и управляемые космонавтами корабли, первоначально предназначенные для исследования околоземного космического пространства — области, далекой, казалось бы, от нужд народного хозяйства, сегодня дают бесценную информацию о наших земных природных ресурсах, о залегании полезных ископаемых на поверхности нашей планеты, позволяют делать долгосрочные метеорологические прогнозы, так необходимые в народно-хозяйственной деятельности.

Я не хочу становиться на зыбкую почву предсказаний того, что могут в будущем дать человечеству миссии к кометам вообще и комете Галлея в частности. Следующее перигелийное прохождение кометы Галлея должно произойти в 2061 году, и специалисты всех космических программ не забыли подумать о будущих поколениях: научная информация, полученная экспедициями, будет собрана в Мировом центре данных, чтобы дети и внуки современных людей могли ею воспользоваться при следующем возвращении этой замечательной кометы.

## Информация

### Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция

*16 октября 1982 года было зарегистрировано появление кометы Галлея в созвездии Малого Пса. С этого дня астрономы всего мира следят за движением кометы по созвездиям. Уже проведены уточнения элементов ее орбиты и вычислена эфемерида, которая поможет наблюдателям изучать это уникальное природное явление.*

*В советской программе исследований кометы Галлея (СОПРОГ) большое место уделено любительским наблюдениям. Это связано с тем, что такие наблюдения, несмотря на скромность астрономического оборудования, которым располагают любители, могут внести существенный вклад, если проводятся по единой программе.*

В Ленинграде уже много лет постоянно действует любительская астрономическая экспедиция, в которой участвуют люди различных возрастов и профессий. Для наблюдения кометы Галлея организуется юношеская экспедиция. Возрастной состав ее — от 13 до 20 лет. В ней

примут участие школьники, учащиеся ПТУ, студенты техникумов и вузов (всего около двадцати человек).

Согласно расчетам, в районе Ленинграда условия наблюдения кометы в основном будут неудовлетворительными, а в благоприятное время блеск кометы будет настолько слаб, что ее можно будет видеть лишь при помощи специальных астрономических приборов. И хотя в октябре — декабре 1985 года все-таки планируется провести ряд экспериментов и предварительные работы в окрестностях Ленинграда, встал вопрос о снаряжении экспедиции в южные районы страны, удобные для наблюдений.

Координационный центр по любительским наблюдениям СОПРОГ выделил для ленинградской юношеской экспедиции район города Алма-Аты. Работы там будут проходить, ориентировочно, с 5 марта по 27 апреля 1986 года.

Подготовка экспедиции осуществляется уже сейчас. Составлена предварительная научная программа. В нее входит фотографирование, спектрографирование кометы, определение ее формы, размеров, блеска самой кометы и ее ядра, и т. д. В экспедиции будет работать служба времени.

Материалы экспедиции, результаты научных наблюдений будут переданы в центр сбора информации СОПРОГ.

*Ответственный по печати экспедиции  
С. Н. Ерлыков*

# Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки

Кандидат физико-математических наук  
В. В. ТРОФИМОВ

*В этой статье речь идет об одном классе элементарно формулируемых задач, известных еще в Древней Греции. Рассказывается, как эти задачи возникли, как они решаются математически и как их решения можно промоделировать с помощью мыльных пленок. Статья доступна восьмиклассникам, но, мы надеемся, заинтересует и более старших читателей.*

## Легенда о царевне Дидоне

Давным давно финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом преданных ей людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата, тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, подгоняемые попутным ветром, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе.

Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Король нумидийцев Ярб воинственно и презрительно разговаривал с непрошеной гостьей. Он принял драгоценности, предложенные Дидоной для покупки земли, но решительно заявил, что взамен он согласен уступить ей лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Царевна безропотно согласилась. Ярб понял хитрость и коварство финикийки слишком поздно: Дидона изготовила из бычьей шкуры тонкий, длинный ремень и отгородила им от берега значительную территорию. Простодушный, но честный Ярб не

стал отказываться от данного слова. А Дидона на этом месте основала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель была названа «Бирса», что на языке обитателей Карфагена означает «бычья шкура».

Заметим, что размеры первоначальной территории могли быть достаточно велики. Представим себе бычью шкуру как прямоугольник  $1 \times 2$  м и будем считать, что Дидона разрешила шкуру на полоски шириной 1 мм по схеме, показанной на рисунке 1. Тогда легко подсчитать длину полученного ремня — она будет равна примерно 2 км, так что Дидона могла бы в этом случае отгородить от берега (который мы будем считать прямым), скажем, прямоугольный участок  $0,5 \text{ км}^2 = 500 \text{ м} \times 1000 \text{ м}$ .

Легенда относит описанные события к 825 г. до н. э. и нам, конечно, судить об их достоверности трудно. Но не исторические события интересуют нас здесь, а математическая задача, которую, видимо, пришлось решать Дидоне:

**Задача 1 (задача Дидоны).**

*Как нужно расположить шкуру фиксированной длины  $L$ , чтобы он отгораживал от прямолинейного берега участок земли максимальной площади?*

## Изопериметрические задачи

Задача Дидоны является частным случаем так называемых *изопериметрических* задач. Это название происходит от двух греческих слов *isos* — равный и *perimetron* — обмер, обвод. Изопериметрическая задача состоит в том, чтобы среди данной совокупности фигур, имеющих одинаковую длину контура (одинаковый пе-

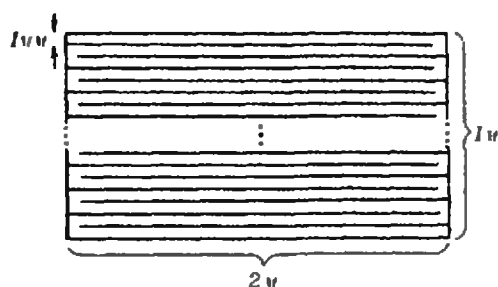


Рис. 1.



риметр), найти ту, чья площадь больше площади любой другой фигуры рассматриваемой совокупности.

Рассмотрим два простых примера. Пусть выделенный класс геометрических фигур состоит из всех треугольников с данным периметром  $L$ . Тогда изопериметрическая задача заключается в том, чтобы найти треугольник периметра  $L$ , у которого площадь максимальна. Таким треугольником является равносторонний (со стороной  $L/3$ ). Если в качестве выделенного класса взять множество всех прямоугольников с фиксированным периметром, то решением соответствующей изопериметрической задачи будет квадрат. Доказательства этих утверждений мы оставим в качестве упражнений читателю.

Значительно более сложной является

**Основная изопериметрическая задача.** Среди всех плоских фигур данного периметра  $L$  найдите ту, которая имеет максимальную площадь.

Ответ, конечно — круг. Еще в древней Греции было известно, что круг имеет большую площадь, чем все другие фигуры с тем же самым периметром, а шар — наибольший объем среди всех тел с одной и той же поверхностью. Недаром круг и шар были в древности символами геометрического совершенства. В начале второго века до нашей эры греческий геометр Зенодор написал специальный трактат «О фигурах, имеющих равную периферию». О существовании этого трактата мы узнаем из сочинений греческих комментаторов Зенодора — Паппа (III в. н. э.) и Теона (IV в. н. э.). Сама рукопись Зенодора утеряна.

Хотя ответ в основной изопериметрической задаче очевиден, про доказательство это сказать никак нельзя. Лишь в XVIII в. великому Леонардо Эйлеру удалось привести убедительное доказательство изопериметрического свойства круга, для чего ему потребовалось создать так называемое *вариационное исчисление*. Об одной попытке привести элементарное доказательство, предпринятой швейцарским математиком Я. Штейнером (1796—1863), мы расскажем ниже.

Сформулируем еще несколько изопериметрических задач. Как мы потом

увидим, их решения, также как и решение задачи Дидоны, легко и красиво следуют из изопериметрического свойства круга.

**Задача 2.** Среди всех линий фиксированной длины  $l$  с концами в данных точках  $A, B$ , найти ту, которая ограничивает вместе с прямой  $(AB)$  фигуру наибольшей площади.

**Задача 3.** Среди всех линий фиксированной длины  $l$  с концами на сторонах угла в  $45^\circ$ , найти ту, которая ограничивает внутри угла фигуру наибольшей площади.

К основной изопериметрической задаче сводятся также некоторые задачи, в формулировку которых явно не входит изопериметричность. Например, такая

**Задача 4.** Найти кратчайшую линию, делящую равносторонний треугольник на две фигуры равной площади.

#### Решение Штейнера основной изопериметрической задачи

Мы рассматриваем всевозможные фигуры на плоскости с данным периметром  $p$ . Установим сперва некоторые свойства максимальных (по площади) фигур этого класса.

**Первое свойство.** *Всякая максимальная фигура выпукла, то есть любая хорда, соединяющая две ее точки, целиком в ней лежит.*

Пусть хорда  $A_1B_1$ , соединяющая точки  $A_1, B_1$  нашей фигуры, не лежит целиком внутри нее. Тогда, очевидно, некоторый отрезок этой хорды, скажем  $AB$ , лежит весь (кроме концов) вне фигуры. Можно считать поэтому, что дана фигура с периметром  $AaBC$ , равным  $p$ , не содержащая хорду  $AB$  (рис. 2). Заменим дугу  $a$  хордой  $AB$ . Периметр при такой замене уменьшится, а площадь увеличится на часть  $AaB$ . Построим теперь фигуру, подобную построенной фигуре  $A\gamma BC$ , но с периметром, равным периметру первоначальной фигуры  $AaBC$ . У новой фигуры площадь будет больше, чем у второй (поскольку коэффициент подобия больше единицы), и подавно больше, чем у первоначальной.

**Второе свойство.** *Всякая хорда максимальной фигуры с периметром  $p$ , делящая пополам ее периметр, обязательно делит ровно пополам и ее площадь.*

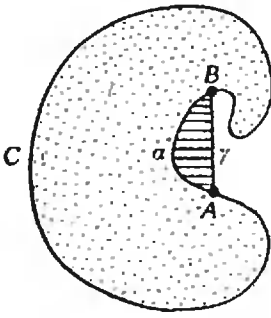


Рис. 2.

Действительно, пусть у фигуры  $ABCD$  с периметром  $p$  хорда  $AC$  делит периметр пополам (рис. 3). Обозначим через  $S_1$  площадь фигуры  $ABC$ , а через  $S_2$  — площадь  $ADC$ . Предположим, что  $S_1 > S_2$ . Построим тогда новую фигуру  $ABCEA$ , заменив линию  $ADC$  линией  $AEC$ , симметричной с  $ABC$  относительно хорды  $AC$ . Новая фигура  $ABCEA$ , имея прежний периметр, имеет площадь больше площади первоначальной фигуры, так как площадь новой фигуры равна  $2S_1$ , а площадь первоначальной равна  $S_1 + S_2$ , в то время как по предположению  $S_1 > S_2$  и, следовательно,  $2S_1 > S_1 + S_2$ . Поэтому фигура  $ABCD$  не является, вопреки предположению, максимальной. Это доказывает, что предположение  $S_1 > S_2$  неверно. Аналогично доказывается, что и предположение  $S_1 < S_2$  приводит к противоречию. Окончательно,  $S_1 = S_2$ .

Назовем всякую хорду, делящую периметр фигуры пополам, ее *диаметром*.

**Третье свойство.** *Всякий диаметр любой максимальной фигуры виден из всех точек ее контура под прямым углом (то есть для любого диаметра  $AC$  и любой точки  $B$  контура угол  $ABC$  равен  $90^\circ$ ).*

Для доказательства этого свойства нам потребуется следующее свойство треугольников: *из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти две стороны взаимно перпендикулярны.* Это утверждение мы оставляем читателю в качестве легкого упражнения и перейдем к доказательству третьего свойства. Предположим, что некоторый диаметр  $AC$  фигуры  $ABCD$  с периметром  $p$  виден из какой-нибудь точки  $B$  ее контура не под прямым углом:  $\angle ABC \neq 90^\circ$

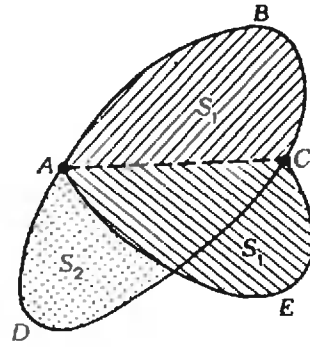


Рис. 3.

(рис. 4). Докажем, что в этом случае фигура  $ABCD$  не обладает наибольшей площадью при фиксированном периметре  $p$ . Обозначим площади фигур  $ABC$  и  $ADC$  через  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Построим прямоугольный треугольник  $A'B'C'$  с прямым углом при вершине  $B'$  такой, что  $A'B' = AB$ . Другими словами, сдвинем или раздвинем стороны  $AB$  и  $BC$ , сохраняя их длины без изменения, так, чтобы они образовали при вершине  $B'$  прямой угол. К сторонам  $A'B'$  и  $B'C'$  приложим сегменты  $A'E'B'$  и  $B'F'C'$  (рис. 5), равные соответствующим сегментам на рисунке 4. В силу максимальности прямоугольного треугольника имеем неравенство  $S_{\triangle A'B'C'} > S_{\triangle ABC}$ . Следовательно, площадь фигуры  $A'E'B'F'C'A'$  больше площади  $S_1$  первоначальной фигуры. Присоединим к фигуре  $A'E'B'F'C'A'$  симметричную с нею относительно оси  $A'C'$  фигуру  $A'K'D'L'C'A'$ , получим фигуру  $A'E'B'F'C'L'D'K'A'$  с прежним периметром  $p$ , но с большей площадью (рис. 6). Итак, фигура  $ABCD$  не является максимальной, если хотя бы из одной точки ее контура какой-нибудь ее диаметр виден не под прямым углом.

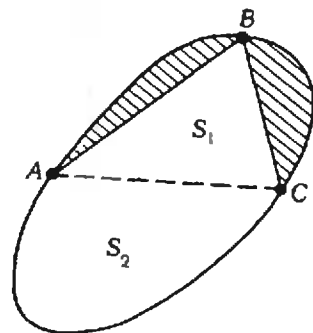


Рис. 4.

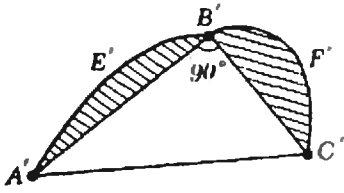


Рис. 5.

Из третьего свойства сразу следует, что искомая максимальная фигура является кругом. Действительно, выберем произвольный диаметр; тогда контур фигуры, по третьему свойству, состоит из вершин прямых углов, опирающихся на этот диаметр, то есть является окружностью. Что и требовалось доказать.

Рассуждение Штейнера, изложенное выше, займствовано нами из замечательной, но труднодоступной книги А. Б. Крыжановского «Изопериметры» (М. — Л., Физматлит, 1959). Оно, как может показаться на первый взгляд, завершает доказательство основной теоремы об изопериметрах. Однако мы в нем сделали одно не правомочное предположение. А именно, мы с самого начала предположили, что решение основной изопериметрической задачи существует.

Это незаконное предположение. Яркий пример, показывающий, что существование решения надо доказывать, доставляет следующая модификация парадокса Перрона.

«Теорема». Среди всех квадратов наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 1.

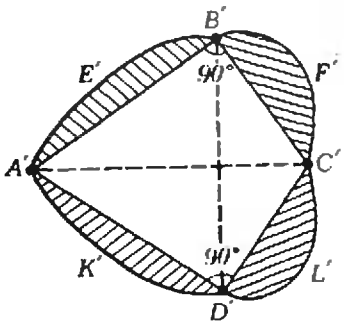


Рис. 6.

«Доказательство». Пусть наибольшую площадь имеет квадрат со стороной  $b=a^2$ . Рассмотрим два случая:  $a < 1$  и  $a > 1$ . Если  $a < 1$ , то  $a^2 < 1$  и площадь квадрата со стороной  $a$  не является наибольшей (она меньше площади единичного квадрата). Если же  $a > 1$ , мы возьмем квадрат со стороной  $b=a^2$ . Тогда  $b > a$  (так как  $a > 1$ ), и площадь квадрата со стороной  $b$  будет  $b^2$ , притом  $b^2 > a^2$  (так как  $b > a$ ). Значит, квадрат со стороной  $a$  не имеет наибольшую площадь, вопреки предположению. «Теорема» доказана.

Читатель, конечно, понимает, в чем ошибка в этом рассуждении. Однако оно проводится по той же схеме, что и приведенное выше «решение» изопериметрической задачи, которое поэтому нельзя считать исчерпывающим.

Строгое решение этой задачи приводится в современных учебниках по вариационному исчислению. Убедительное доказательство существования можно получить и из «элементарных» соображений, но на этом пути нужно будет провести довольно тонкое рассуждение «по непрерывности»; мы здесь не будем этим заниматься, отсылая читателей к цитированной книге А. Б. Крыжановского или к книге Р. Куранта и У. Роббинса «Что такое математика» (М., «Просвещение», 1967, с. 408). Читателю, сомневающемуся теперь в существовании решения изопериметрических задач, мы советуем обратиться к последнему разделу нашей статьи.

### Решение задач

Наша ближайшая цель — привести решения четырех ранее сформулированных изопериметрических задач. При этом мы будем предполагать известным изопериметрическое свойство круга.

Решение задачи Дидоны. Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  представляют собой полукруг и какую-нибудь другую фигуру, удовлетворяющую всем условиям задачи. Прибавляя к этим фигурам фигуры  $ADC$  и  $A'D'C'$ , симметричные с первыми относительно осей  $AC$  и  $A'C'$ , составим две новые фигуры: круг  $ABCD$  и отличную от круга фигуру  $A'B'C'D'$ , периметры которых равны  $2l$ . Согласно основной

теореме об изопериметрах, площадь круга  $ABCD$  больше площади фигуры  $A'B'C'D'$ . Поэтому площадь полукруга  $ABC$  больше площади фигуры  $A'B'C'$ , и полукруг  $ABC$  будет решением задачи Дидоны.

Решение задачи 2. Ответом будет дуга окружности  $AB$  длины  $p$  (рис. 7). Доказательство такое же, как в предыдущей задаче: дугу  $AB$  нужно продолжить до окружности и применить изопериметрическое свойство круга.

Решение задачи 3. Ответом будет дуга  $\delta$  окружности с центром в вершине угла  $O$ , длины  $p$ . Для доказательства проведем еще 6 лучей из точки  $O$  так, чтобы разбить плоскость на 8 углов по  $45^\circ$ . Если бы ответ — кривая  $\gamma$  — отличался от дуги  $\delta$ , то мы могли бы построить в каждом из семи построенных углов по экземпляру кривой  $\gamma$ , а тогда объединение этих кривых (длиной  $8k$ ) ограничивала бы площадь большую, чем площадь круга периметра  $8p$ , вопреки изопериметрическому свойству круга.

Решение задачи 4. Ответом будет дуга окружности с центром в одной из вершин. Доказательство, аналогичное предыдущему, мы оставляем читателю, так же как вычисление радиуса искомой окружности.

### Мыльные пленки

Для тех читателей, которые стали сомневаться в существовании решений изопериметрических задач, а также для всех любителей красивых физических экспериментов, мы предлагаем несколько очень простых опытов с мыльной пленкой, подтверждающих правильность наших решений. Конечно, физический опыт не может заменить строгое мате-

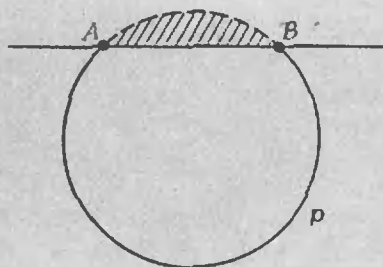


Рис. 7.



Фото 1.

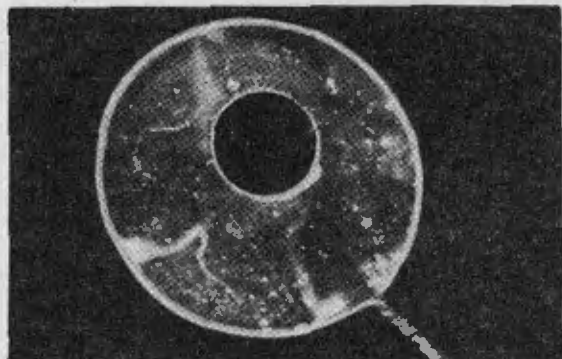


Фото 2.

матическое доказательство, он только делает более правдоподобным полученный результат.

Для проведения первых — самых простых — опытов, вам потребуется насыщенный мыльный раствор (лучше использовать хорошее туалетное мыло, можно добавить немного глицерина), тонкая проволока, обыкновенная нитка; для следующих потребуются еще и небольшие колечки (свободно скользящие по проволоке) и несколько прямых тонких соломинок.

Первый опыт. Проволочную рамку погрузите в мыльный раствор и осторожно выньте из него. Рамка затянется тонкой пленкой из мыльной воды. На пленку плавно положите связанную концами тонкую нитку, предварительно смоченную в мыльной воде. Эта петля плавает на пленке, имея неправильную форму (фото 1). Затем пленку внутри петли проколите горячей иглой — петля мгновенно и точно принимает форму окружности (фото 2).

Описанное явление объясняется так: из общих физических принципов следует, что устойчивое положение равновесия мыльной пленки отвечает минимуму энергии ее натя-

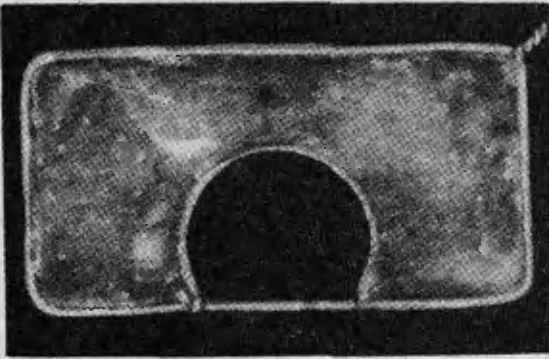


Фото 3.

жения; минимум же энергии достигается, естественно, при минимальной площади поверхности, внешней по отношению к ниточной петле, то есть при максимальной площади дыры.

Таким образом, этот опыт демонстрирует правильность решения основной изопериметрической задачи.

Второй опыт. Привяжите теперь нитку двумя концами к одному из прямолинейных участков рамки так, чтобы расстояние между концами было примерно равно четверти длины нитки. Погрузите рамку в раствор и выньте ее так, чтобы нитка плавала по поверхности полученной пленки. Проколите пленку внутри петли — петля мгновенно и точно принимает форму дуги окружности (фото 3). Двигая один из концов нитки вдоль рамки, вы сможете получить дуги окружностей разных радиусов.

Этот опыт демонстрирует правильность решения задачи 3. Следующий опыт демонстрирует решение задачи Дидоны.

Третий опыт. Наденьте два маленьких колечка на рамку и привяжите к ним нитку. Погрузите рамку в раствор и выньте ее так, чтобы нитка плавала по поверхности пленки. Проколите маленькие пленочки, образовавшиеся внутри колечек и проверьте, что колечки свободно двигаются по рамке. Проколите теперь пленку внутри петли — петля мгновенно и точно примет форму полуокружности. (Этот более тонкий эксперимент может получиться не сразу — нужно, чтобы трение колечек с рамкой было очень малым.)

Четвертый опыт. Соедините концы двух прямолинейных проволок нитками одинаковой длины, натяните проволочки так, чтобы получился пря-

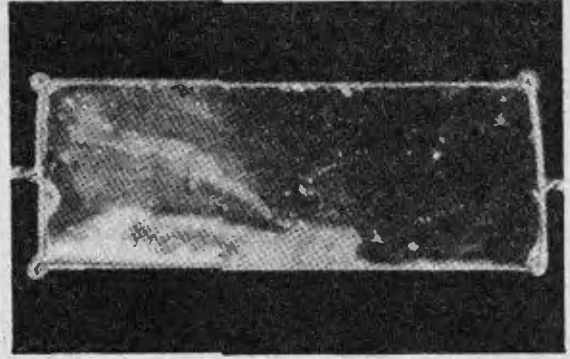


Фото 4.

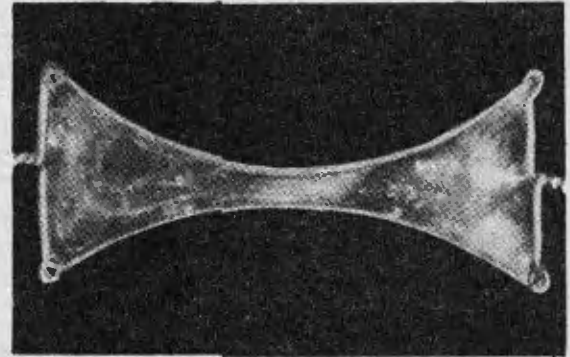


Фото 5.

моугольник. Опустите прямоугольник в раствор и выньте (фото 4), а затем дайте проволочкам несколько сблизиться. Тогда нитяные стороны примут форму правильных дуг окружности (фото 5).

Пятый опыт. Возьмите несколько кусков тонкой соломы и пропустите сквозь них нить, длина которой больше суммы длин соломинок. Свяжав концы нити вместе, вы получите фигуру, в которой криволинейные части, образуемые частями нити между соломинками, могут произвольно изменять форму, сохраняя общую длину. Эту фигуру, смоченную в воде, поместите на мыльную пленку, затягивающую рамку и проколите пленку внутри фигуры. После этого ваша фигура принимает такую форму, что все нити образуют дуги одного и того же круга, соломинки же изображают его хорды.





## Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Импульс и кинетическая энергия» предназначена восьмиклассникам, «Скин-эффект» — девятиклассникам, «Две загадки бета-распада» — десятиклассникам.  
Материалы подготовил И. К. Белкин.

### Импульс и кинетическая энергия

Одна из основных идей механики состоит в том, что сила, приложенная к телу, есть причина изменения его скорости. Второй закон Ньютона и выражает эту идею:

$$m\vec{a} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t} = \vec{F}.$$

В механике используются еще две величины, связанные со скоростью. Это — импульс тела (другое, сейчас почти вышедшее из употребления, название этой величины — количество движения) и кинетическая энергия тела. Импульс тела  $\vec{P}$  — векторная величина, равная (по определению) произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

Кинетическая энергия  $E_k$  тела — скалярная величина, равная (тоже по определению) половине произведения массы тела на квадрат его скорости:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Поскольку и импульс, и кинетическая энергия непосредственно выражаются через скорость тела, а изменение скорости вызывается действующей на тело силой, очевидно, что изменения импульса и кинетической энергии тоже связаны с силой.

Для импульса тела эта связь следует непосредственно из второго закона Ньютона, записанного в виде

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F}t \quad (1)$$

— изменение импульса тела равно произведению силы на время ее действия, то есть импульсу силы («Физика 8», § 50).

Связь кинетической энергии тела с силой выглядит так:

$$E_{k2} - E_{k1} = Fs \cos \alpha = A, \quad (2)$$

где  $s$  — модуль вектора перемещения тела,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{s}$ , а произведение  $Fs \cos \alpha = A$  — работа действующей на тело силы. Таким образом, эта запись означает, что изменение кинетической энергии тела равно работе приложенной к телу силы («Физика 8», § 55).

Роль импульса и кинетической энергии в описании движения. Различие между величинами  $\vec{P}$  и  $E_k$  не ограничивается тем, что одна из них векторная, а другая скалярная.

Из равенства (1) видно, что если сила  $\vec{F}$  задана, изменение импульса определяется только временем действия силы и не зависит от того, к какому телу она приложена. Любое тело (тело любой массы) под действием данной силы за данное время изменит свой импульс на одну и ту же величину. Даже если бы, например, столкнулись герои басни Крылова «Слон и Моська», то импульс каждого из них изменился бы одинаково.

Равенство (2) говорит о том, что при заданной силе изменение кинетической энергии тела определяется только расстоянием, пройденным телом в направлении действия силы (произведение  $s \cos \alpha$  — это проекция перемещения на направление силы). Любое тело под действием данной силы на данном расстоянии изменит свою кинетическую энергию на одну и ту же величину.

Таким образом, изменение импульса связано с промежутком времени, необходимым для изменения скорости тела, а изменение кинетической энергии связано с расстоянием, которое тело должно пройти для изменения его скорости (разумеется, при заданной силе).

Другими словами, изменение импульса — это характеристика действия силы во времени, а изменение кинетической энергии — характеристика действия силы в пространстве.

Еще одно различие между импульсом и кинетической энергией. Пожалуй, самое замечательное свойство импульса тела состоит в том, что общий импульс замкнутой системы тел (то есть векторная сумма импульсов всех тел системы) остается неизменным при любых взаимодействиях и любых движениях тел этой системы. Это — закон сохранения импульса («Физика 8», § 51).

Обладает ли свойством «сохраняться» кинетическая энергия? Рассмотрим простой пример, из которого сразу станет видно, что в этом импульс и кинетическая энергия отличаются друг от друга.

Пусть по гладкой (без трения) горизонтальной поверхности движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями  $v$  два одинаковых, например стальных, шарика массой  $m$  каждый (см. рисунок). В какой-то момент шарики соприкоснутся, затем какое-то время будут продолжать приближаться друг к другу, потом на мгновение остановятся и после этого начнут расходиться, пока не станут двигаться в противоположные стороны с прежними по модулю скоростями.

Посмотрим, чему равны суммарные импульсы и кинетические энергии обоих шариков до, во время и после столкновения.

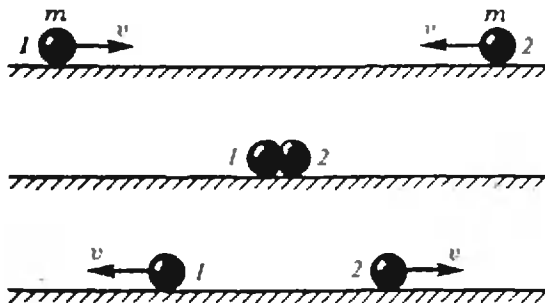
До столкновения импульсы шариков равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = (m\vec{v}) + (-m\vec{v}) = 0,$$

а кинетические энергии шариков одинаковы и равны  $mv^2/2$  каждая, так что

$$E_{k1} + E_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Во время столкновения в тот момент времени, когда оба шарика покоятся,



их скорости равны нулю, следовательно,

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0, \\ E_{k1} + E_{k2} = 0.$$

После столкновения шарики, как и до столкновения, движутся в противоположные стороны с одинаковыми по модулю скоростями, поэтому

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = -m\vec{v} + m\vec{v} = 0, \\ E_{k1} + E_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Таким образом, суммарный импульс системы двух шариков все время оставался одним и тем же. Кинетическая же энергия до и после столкновения одинакова (именно такое столкновение и называют упругим), а во время столкновения она изменялась, так что в какой-то момент даже временно исчезла совсем. Значит, существует закон сохранения импульса, но нет закона сохранения кинетической энергии.

Заметим, что если бы шарики были не из стали, а из мягкой глины или пластилина, то при столкновении они бы слиплись, остановились и больше бы не двигались (такое столкновение называют абсолютно неупругим). Их общий импульс был бы по-прежнему равен нулю, а кинетическая энергия во время столкновения исчезла бы не временно, а навсегда.

Как известно, закон сохранения существует и для энергии, но не для кинетической, а для полной, включающей в себя и другие формы энергии. Так, в нашем примере временная пропажа кинетической энергии при упругом столкновении шариков означает лишь тот факт, что в этот момент она полностью превратилась в потенциальную энергию упругой деформации шариков. В конце столкновения потенциальная энергия вновь целиком превратилась в кинетическую. При неупругом же ударе кинетическая энергия шариков переходит во внутреннюю энергию (шарики нагреваются), которая обратно в кинетическую энергию уже не превращается.

## Скин-эффект

Из школьного курса физики («Физика 9», § 94) известно, что вследствие явления электромагнитной индукции в любом проводнике под действием изменяющегося магнитного поля наводятся вихревые токи (токи Фуко). Они вызываются индукционным электрическим полем, которое возникает при изменении магнитного поля. Силовые линии индукционного электрического поля всегда замкнуты, поэтому и токи Фуко тоже замкнутые (вихревые). Так как обычно проводники обладают электрическим сопротивлением, энергия токов Фуко переходит в тепло (проводник нагревается), а сами токи при этом затухают.

Оказывается, что быстропеременные токи Фуко не проникают в глубь проводника и текут практически только в его поверхностном слое. Это явление называют *скин-эффектом* (от английского слова *skin* — кожа). Его надо учитывать при использовании переменных токов (и полей) в технике.

Причину возникновения скин-эффекта качественно можно объяснить с помощью правила Ленца для электромагнитной индукции. Согласно этому правилу, направление индукционных токов всегда таково, что они своим магнитным полем «мешают» изменению магнитного потока, которое эти токи вызвало. Поэтому при помещении проводника во внешнее переменное поле возникают токи Фуко, которые ослабляют это поле в проводнике, экранируют его. Причем чем дальше от поверхности в глубь проводника, тем меньшим становится суммарное магнитное поле. Соответственно и величина тока в проводнике с глубиной тоже убывает. Убывание происходит по столь быстрому закону, что, начиная с некоторой глубины, поле и ток можно считать практически равными нулю. Эту глубину называют толщиной скин-слоя.

От чего зависит толщина скин-слоя? С одной стороны, чем быстрее изменяется магнитное поле, тем больше возникающая электродвижущая сила индукции и тем большие токи Фуко текут в проводнике. С другой стороны, сила тока зависит и от

удельного сопротивления проводника — в проводниках с меньшим удельным сопротивлением наводятся большие токи Фуко и магнитное поле экранируется сильнее. Поэтому при увеличении частоты изменения поля и при уменьшении сопротивления проводника толщина скин-слоя уменьшается.

Точный расчет показывает, что для меди, например, при частоте промышленного переменного тока  $\nu = 50$  Гц толщина скин-слоя составляет приблизительно 1 см. Это не слишком малая величина, поэтому в проводниках диаметром до нескольких сантиметров переменный ток распределяется по всему сечению провода, а скин-эффект проявляется в полной мере в гораздо более толстых проводах. В то же время в диапазоне средних радиоволн с частотой  $\nu \sim 10^7$  Гц для толщины скин-слоя в меди имеем  $\approx 10^{-3}$  см. Это уже достаточно малая величина. Быстропеременные токи такой частоты текут практически только по поверхности проводов. Можно проводники сделать вообще полыми, и это почти не скажется на их сопротивлении. Иногда для уменьшения потерь проводники в радиосхемах покрывают тонким слоем серебра — токи текут только в этом слое, а серебро обладает меньшим удельным сопротивлением, чем медь.

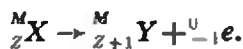
Интересно, что в сверхпроводниках индукционные токи вообще не затухают (сопротивление равно нулю), и поэтому они способны экранировать даже постоянное магнитное поле. В толще сверхпроводника суммарная индукция внешнего магнитного поля и магнитного поля экранирующих токов равна нулю. Это явление называют эффектом Мейснера\*).

## Две загадки бета-распада

Как известно, естественный бета-радиоактивный распад состоит в том, что ядра атомов одного элемента самопроизвольно испускают бета-частицы, то есть электроны, и при этом

\* Об этом эффекте подробно рассказывается в статье Л. Г. Асламазова «Сверхпроводящие магниты», опубликованной в девятом номере «Кванта» за 1984 год.

превращаются в ядра другого элемента с атомным номером на единицу большим, но с прежней массой («Физика 10», § 103). Символически это превращение записывается так:



Здесь  $X$  — исходное ядро,  $Y$  — продукт распада,  $e$  — электрон (верхний индекс «0» показывает, что масса электрона по сравнению с атомной единицей массы очень мала).

Тщательное изучение бета-распада показало, что это явление таит в себе две загадки.

**Загадка первая: «пропажа» энергии.** Если ядро  $X$  самопроизвольно превращается в ядро  $Y$ , то это значит, что энергия  $W_X$  ядра  $X$  больше, чем энергия  $W_Y$  ядра  $Y$ . А энергия вылетающей при этом бета-частицы должна быть равна разности энергий  $W_X - W_Y$  (если пренебречь энергией отдачи).

Поскольку все исходные ядра  $X$  одинаковы, равно как одинаковы и все получающиеся из них ядра  $Y$ , все вылетающие бета-частицы должны иметь одну и ту же энергию. Опыты же показывают, что энергия практически всех бета-частиц меньше, чем разность энергий  $W_X - W_Y$ . Точнее:  $\beta$ -частицы имеют различные энергии, и все они лежат в пределах от нуля до максимального значения, равного  $W_X - W_Y$ . Например, для бета-частиц, испускаемых ядрами  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  (период полураспада 5 дней), максимальное значение энергии около 1 МэВ, а средняя энергия, приходящаяся на долю одной частицы, меньше чем 0,4 МэВ.

Создавалось впечатление, что бета-распад — это процесс, в котором, в нарушение закона сохранения энергии, энергия пропадает бесследно. Некоторые физики склонны были думать, что закон сохранения энергии, безусловно верный в мире макроскопических процессов, «необязателен» для некоторых процессов, связанных с элементарными частицами. К этой мысли (о возможности нарушения закона сохранения энергии) склонялся даже такой физик, как Нильс Бор. Высказывались и другие мнения, что возможно найдутся процессы, при которых энергия не пропадает бесследно (как в случае бета-

распада), а наоборот возникает из ничего.

**Нейтрино.** Закон сохранения энергии был, однако, «спасен» швейцарским физиком-теоретиком Вольфгангом Паули. В 1930 году он высказал предположение, что при бета-распаде из ядра вылетает не только электрон, но и еще одна частица, на долю которой и приходится недостающая энергия. Но почему эта частица никак себя не обнаруживает: не ионизует газ, как это делает электрон; ее энергия при столкновениях с атомами не переходит в тепло и т. д.? Паули объяснял это тем, что придуманная им частица электрически нейтральна и не обладает массой покоя\*).

Очень странной казалась эта частица, которой итальянский физик Энрико Ферми дал имя — нейтрино. Все назначение нейтрино состояло в том, чтобы «спасти» закон сохранения энергии. С такими частицами физикам иметь дело еще не приходилось. Тем не менее, идея Паули о новой частице быстро получила всеобщее признание. Советский физик А. И. Лейпунский уже в 1936 году придумал способ ее обнаружения. Однако окончательно ее реальное существование было доказано только в 1956 году, почти через 26 лет после того, как она «родилась» в мозгу физика с богатым воображением — В. Паули.

**Загадка вторая: откуда берутся электроны?** Эта загадка бета-распада (ее можно было бы поставить и на первое место) состояла вот в чем.

Как известно («Физика 10», § 107), атомные ядра всех элементов состоят только из протонов и нейтронов. Как же из ядер могут вылетать электроны, которых там нет, и нейтрино, которых там тоже нет?

Объяснить этот удивительный факт (из ядра вылетает то, чего там нет) можно только тем, что частицы — протоны и нейтроны, образующие ядро, способны взаимно превращаться друг в друга. В частности, бета-распад состоит в том, что один из нейтронов, входящих в ядро радиоактивного элемента, превращается в протон.

(Окончание см. на с. 34)

\* Сейчас существует и другая точка зрения — что у нейтрино есть очень малая масса покоя. Однако пока этот факт нельзя считать бесспорным.

## Калейдоскоп «Кванта»

Математика является наукой, которая не только показывает в каждом случае соотношения, но и определяет причины, от которых они зависят по природе самих вещей.

Л. Эйлер



Леонард Эйлер (1707—1783) принадлежит к числу величайших математиков, заложивших в XVII—XVIII веках основы современной математики. Сын швейцарского пастора, он в 1726 году приезжает в Россию для работы в Петербургской Академии наук и остается здесь до конца своей долгой жизни, за исключением периода (1741—1765) работы в Берлинской академии наук.

Совершенно удивительны как его работоспособность (около 800 трудов, собранных в настоящее время в 72 томах), так и умение увидеть главное в любой изучаемой им области математики. В большинстве математических наук обязательно существуют основополагающие теоремы, формулы, уравнения, носящие имя Эйлера.

Подробнее об Эйлере и его работах можно прочесть в 10-м номере нашего журнала за 1983 год.

**Квант 5**

1985

## Как разрезать пирог

Математика — наука точная. Она учит считать, измерять и многому другому. Поэтому не удивительно, что когда на дне рождения у Васи потребовалось разрезать праздничный пирог на 11 частей, то все закричали: «Пусть это сделает Миша!» — ведь Миша лучший математик класса. Миша взглянул на пирог. Пирог был круглым, но не очень, и с одной стороны потолще, а с другой — потоньше. Да, задача оказалась трудной.

«Пусть я действительно разрежу пирог на равноценные части, но вдруг кому-нибудь покажется, что ему досталось меньше, чем соседу. Как мне доказать, что части действительно одинаковы?» — думал Миша.

Но тут он вспомнил, как он делил несколько дней назад с именинником мороженое, купленное на два гривенника — его и свой. «Тогда я разрезал мороженое на две части, по моему, поровну, но вместо того, чтобы прятать их

за спиной, положил их на стол перед Васей — выбирай ту половину, которая тебе кажется большей. И оба мы были довольны. Нельзя ли и тут поступить подобным образом?» — думал Миша. И после некоторого размышления он воскликнул:

«Ребята, становитесь за мной в очередь. Сейчас я отрежу часть пирога, которая составляет, как мне кажется,  $1/11$  его часть. Кто стоит за мной? Ссрежа? Если ты считаешь, что в куске больше  $1/11$  части пирога, то отрежь от него столько, чтобы, по-моему, в нем



1. В «магическом квадрате»  $3 \times 3$  суммы чисел во всех горизонтальных и вертикальных рядах, а также по диагоналям, одинаковы (рис. 1). При этом в его центре обязательно стоит число 5. Если же мы поставим в центральную клетку число 1 (рис. 2), то расставить остальные числа от 2 до 9 в клетках квадрата так, чтобы все указанные суммы были равны, оказывается невозможным. Попробуйте их расставить так, чтобы в горизонтальных и вертикальных рядах суммы были одинаковы.

М. В. Варга

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 1.

8	1	

Рис. 2.





действительно осталась  $1/11$ , если же ты считаешь, что в нем не больше  $1/11$  части пирога, то есть в остатке не меньше  $10/11$ , то проходи, не прикасаясь к пирогу. После тебя с первым куском так же сможет поступить следующий по очереди и т. д., пока не будут опрошены все ребята. Тот, кто последним прикоснулся к куску, тот и забирает его, в частности, если никто из вас ничего не отрежет, кусок достанется мне. Справедливо?» «Вроде бы так, — ответил за ребят Коля, — а дальше?

«Дальше, — радостно улыбаясь от сознания верно решенной задачи, произнес Миша, — останется

10 человек, уверенных, что в оставшейся части не менее  $10/11$  от всего пирога. Тем же способом мы кому-то из них отдадим  $1/10$  этой части, то есть  $1/11$  всего пирога, и так далее, пока последний не получит свою часть пирога, которую он, в соответствии с правилами, заведомо будет считать не меньшей, чем  $1/11$  часть всего пирога, как и все остальные».

История эта выдумана и ее решение имеет скорее теоретическую, чем практическую ценность, особенно если пирог легко крошится. Впрочем, этой проблемы не будет, если торт сделан из мороженого. Однако задача о дележе

пирога неправильной формы между несколькими людьми так, чтобы каждый считал, что ему досталось не меньше, чем полагается в случае равного раздела, появилась довольно давно. Вместе с решением она содержится в книге «Математические соревнования», изданной в серии «Библиотека физико-математической школы» в 1974 г. Приведенное



здесь решение проще изложенного в книге, его прислал нам ученик 7 «В» класса школы № 2 г. Москвы Миша Ободовский, сейчас он уже восьмиклассник.

А. И.

## ГОЛОВОЛОМКИ

2. Разгадайте серию ребусов «Времена года»:

ВЕСНА:В=ЕЙСКЕ  
 ЛЕТО:В=ОРЛЕ  
 ОСЕНЬ:В=МОСКВЕ  
 ЗИМОЙ:В=ИЛИМЕ

В. М. Радунский

3. Эту головоломку очень просто сделать, но совсем не просто решить. Нужно начертить фигуру,

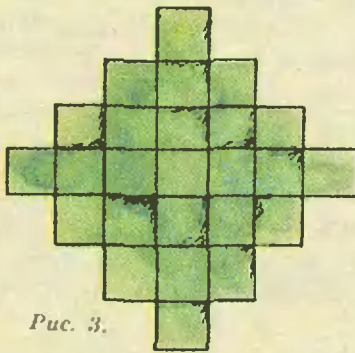


Рис. 3.

изображенную на рисунке 3, и изготовить пять



Рис. 4

цепочек, каждая из которых содержит по пять квадратиков. Цепочки удобно делать из картона, оклеивая нитку с двух сторон картонными квадратиками (рис. 4). Теперь попробуйте замостить фигуру полученными цепочками.

Н. И. Авилов



(Начало см. на с. 28)

При этом в ядре оказывается одним протоном больше, чем было, а общее число частиц остается прежним. Просто один из нейтронов стал протоном. Но если бы дело только тем и ограничилось, был бы нарушен закон сохранения электрического заряда. Природа таких процессов не допускает! Так вот, оказывается, что вместе с превращением нейтрона в протон в ядре рождаются электрон, отрицательный заряд которого компенсирует положительный заряд появившегося протона, и нейтрино, которое уносит определенную долю энергии.

Таким образом, при бета-распаде

в ядре происходит превращение одного из нейтронов в протон и рождение двух частиц — электрона и нейтрино. Протон остается в ядре, электрон же и нейтрино, которым в ядре быть «не полагается», вылетают из него.

Заметим, что процесс бета-радиоактивного распада несколько напоминает процесс испускания светового кванта (фотона). Бета-частица и нейтрино рождаются в момент перехода ядра из одного состояния в другое, аналогично тому как фотон испускается атомом при переходе электрона, входящего в состав электронной оболочки атома, с одного энергетического уровня на другой.

## Математика 10

### С помощью обратной функции

В школе интегралы вычисляют по формуле Ньютона—Лейбница. Чтобы вычислить таким способом интеграл

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin x \, dx,$$

надо знать первообразную для функции  $\arcsin x$ , а вы ее не знаете. Как быть?

Обратимся к геометрическому смыслу интеграла: интеграл есть площадь. В частности,  $I_1$  — площадь области, окрашенной на рисунке 1 в голубой цвет. Найдем эту площадь как разность площади соответствующего прямоугольника и площади  $\sigma_1$  «желтой области». Поскольку график функции  $\arcsin x$  представляет собой «перевернутый» (полученный симметрией около прямой  $y=x$ ) график функции  $\sin x$ , пло-

щадь  $\sigma_1$  равна площади под синусоидой  $x=\sin y$  на участке изменения  $y$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\sigma_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = -\cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Следовательно,  $I_1 = \frac{\pi}{2} - 1$ .

Вычислим теперь интеграл

$$I_2 = \int_a^b \ln x \, dx \quad (1 < a < b).$$

Снова обратимся к рисунку (рис. 2). На этот раз «голубая площадь»  $I_2$  равна площади «большого прямоугольника» минус площадь «маленького прямоугольника» и площадь  $\sigma_2$  «желтой области». График функции  $\ln x$  есть «перевернутый» график обратной функции  $e^x$ , поэтому  $\sigma_2$  — площадь под графиком функции  $x=e^y$  на участке изменения  $y$  от  $\ln a$  до  $\ln b$ :

$$\sigma_2 = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y \, dy = e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = b - a.$$

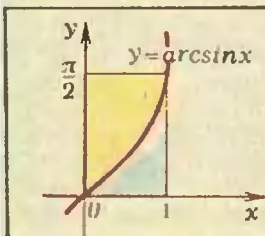


Рис. 1.

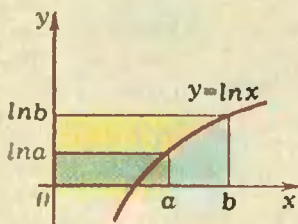


Рис. 2.

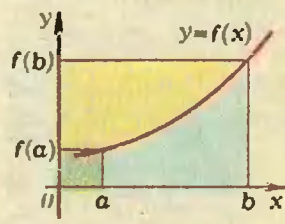


Рис. 3.

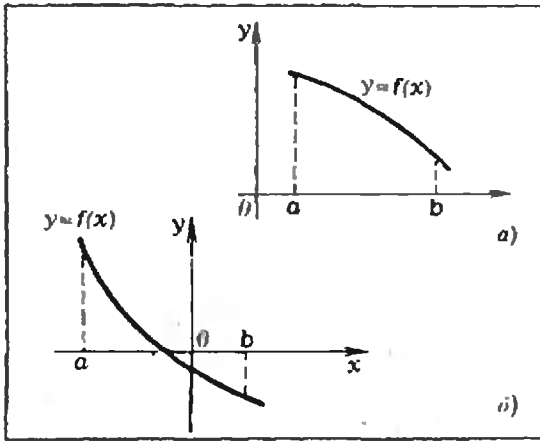


Рис. 4.

Следовательно,  $I_2 = b \cdot \ln b - a \times \ln a - (b-a) = b \cdot \ln \frac{b}{e} - a \cdot \ln \frac{a}{e}$ .

Мы дважды выразили интеграл от некоторой функции ( $\arcsin x$ ,  $\ln x$ ) через интеграл от обратной функции ( $\sin x$ ,  $e^x$ ).

$\ln x$  и  $e^x$  — взаимно-обратные функции. Но  $\arcsin x$  и  $\sin x$  — не взаимно-обратные функции ( $\sin x$  — не обратимая функция); взаимно-обратными являются  $\arcsin x$  и  $\sin x$ , рассматриваемый на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , или, как говорят математики, су-

жение функции  $\sin x$  на отрезок  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Нельзя ли это сделать и в общем случае? Если, например, график функции  $f$  имеет такой вид, как на рисунке 3, и функция  $g$  — обратная для  $f$  на  $[a; b]$ , то из рисунка 3

$$\int_a^b f(x) dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy. \quad (1)$$

Но если график функции  $f$  имеет такой вид, как на рисунках 4, а или 4, б, то из рисунка равенство (1) не получается. Верно ли оно все-таки? Если верно, то как его доказать?

Как доказать равенство (1) для интеграла, не ясно. Попробуем доказать соответствующее утверждение для первообразной. Заменим в (1)  $b$  на  $x$ :

$$\int_a^x f(t) dt =$$

$$= x \cdot f(x) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy \quad (2)$$

(для простоты мы заменили также переменную интегрирования  $x$  на  $t$ ; от обозначения переменной интегрирования величина интеграла, очевидно не зависит:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = \dots)$$

Как известно, функция  $\int_a^x f(t) dt$  явля-

ется первообразной для непрерывной функции  $f$  («Алгебра и начала анализа 9—10», задача 1046). Поэтому, если равенство (2) верно, то функция

$$x \cdot f(x) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy,$$

или, что все равно, отличающаяся от нее на константу функция

$$\Phi(x) = x \cdot f(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy, \quad (3)$$

также будет первообразной для  $f$ .

Чтобы проверить, верно ли это, надо продифференцировать правую часть равенства (3). Потребуем поэтому, чтобы функция  $f$  была дифференцируема.

Функция  $\int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy$ , входящая в

правую часть равенства (3), является композицией функции  $z=f(x)$  и функ-

ции  $\int_{f(a)}^z g(y) dy$ . Поскольку

$$\left( \int_{f(a)}^z g(y) dy \right)' = g(z), \quad (4)$$

по правилу дифференцирования композиции

$$\left( \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy \right)' = g(f(x)) \cdot f'(x).$$

Так как функция  $g$  — обратная для  $f$ ,  $g(f(x)) = x$ . Следовательно,

$$\left( \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy \right)' = x \cdot f'(x).$$

Поэтому

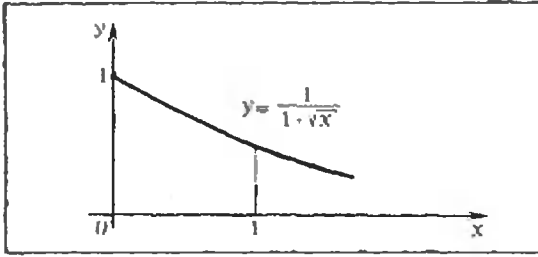


Рис. 5.

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (x \cdot f(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy)' = \\ &= (x \cdot f(x))' - \left( \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy \right)' = \\ &= f(x) + x \cdot f'(x) - x \cdot f'(x) = f(x).\end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\Phi$  действительно является первообразной для функции  $f$ .

Нами вроде бы доказана

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  дифференцируема и обратима на интервале  $]\alpha; \beta[$  и функция  $g$  — обратная для  $f$  на  $]\alpha; \beta[$ . Тогда для любого  $a \in ]\alpha; \beta[$  функция

$$\Phi(x) = x \cdot f(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy$$

является первообразной для  $f$  на  $]\alpha; \beta[$ .

Слова «вроде бы» поставлены нами на всякий случай, поскольку мы вели вычисления, еще не дав формулировки и не особенно следя за их обоснованностью. Просмотрев еще раз выкладку, видим, что для верности (4) нужна непрерывность функции  $g$ . Можно доказать, что эта непрерывность вытекает из непрерывности и обратимости функции  $f$ ; непрерывность же функции  $f$  следует из ее дифференцируемости.

**Упражнение 1.** Найдите первообразную для функции а)  $\arcsin x$ , б)  $\ln x$ .

Вернемся к равенству (1). Теперь легко доказывается

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  дифференцируема и обратима на интервале  $]\alpha; \beta[$  и функция  $g$  — обратная для  $f$  на  $]\alpha; \beta[$ . Тогда для любых  $a, b \in ]\alpha; \beta[$

$$\int_a^b f(x) dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Учитывая теорему 1, по формуле Ньютона — Лейбница получаем

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \Phi(x) \Big|_a^b = \\ &= [x \cdot f(x) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy] \Big|_a^b = \\ &= b \cdot f(b) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy - \\ &\quad - a \cdot f(a) + \int_{f(a)}^{f(a)} g(y) dy = \\ &= b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Например, функция  $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$  дифференцируема и обратима на  $]0; +\infty[$  (рис. 5). Легко подсчитать, что обратной для нее будет функция  $x = \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2$  ( $0 < y \leq 1$ ). Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 1\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{y} - 2 \ln y + y\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 2 \ln \frac{e}{2}.\end{aligned}$$

Подспудная цель этой статьи — показать, как бывает полезно сделать чертеж, проинтерпретировать аналитические понятия геометрически (попробуйте «открыть» формулу (1) без чертежа!). Перефразируя известные слова Цезаря, можно эту идею выразить так: «Нарисовал, увидел, доказал!».

**Упражнения.**

2. Найдите первообразную на  $]1; +\infty[$  для функции а)  $y = \sqrt{x^2 - 1} + x$ , б)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .

3. Вычислите а)  $\int_{-1}^0 \arccos x dx$ , б)

$$\int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx, \text{ в) } \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \text{ г) } \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$$

П. Г. САТЬЯНОВ

## Задачи

1. Найдите все такие двузначные числа, которые делятся на каждую из цифр в их записи.

2. Однажды в Артеке за круглым столом оказались пятеро ребят родом из Москвы, Ленинграда, Горького, Перми и Свердловска — Юра, Толя, Леша, Коля и Витя.

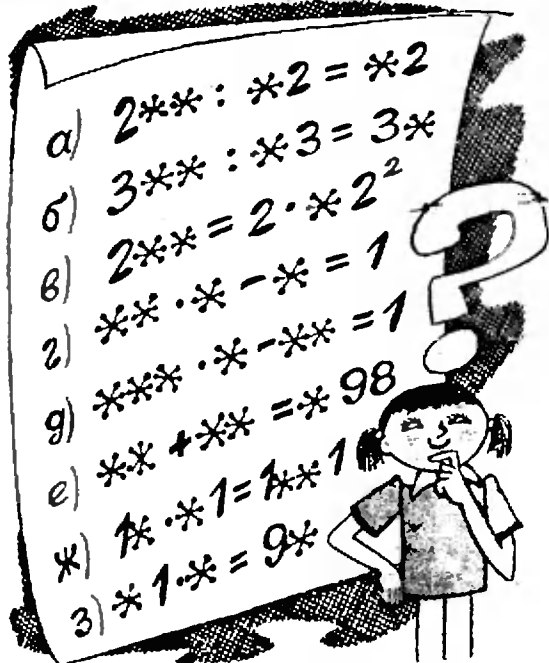
Москвич сидит между свердловчанином и Витей, ленинградец — между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Ленинграде, Юра бывал в Горьком, но не был в Свердловске, а свердловчанин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.

3. Найдите наименьшее четырехзначное число, квадратный корень из которого равен числу, образованному первыми двумя цифрами в сумме с квадратным корнем из числа, образованного последними двумя его цифрами.

4. Для открывания флакона с туго сидящей в нем притертой пробкой рекомендуют горлышко флакона нагреть. На чем основан этот рецепт?

5. Восстановите пропущенные цифры в равенствах на рисунке.

Эти задачи нам предложили: В. Ф. Лев, М. А. Роллова, Н. К. Антонович, А. П. Савин, С. Н. Олехник.



# Задачник Кванта

## Задачи

M921—M925; Ф933—Ф937

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M921, 922» или «Ф933». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M921. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известны величины двух углов  $\angle A = \alpha$  и  $\angle B = \beta$ , а его удвоенная площадь равна  $AB \cdot CD + BC \cdot AD$ . Найдите отношение длин всех его сторон  $AB:BC:CD:DA$ , если

а)  $\alpha = 5\pi/12$ ,  $\beta = 7\pi/12$ ; б)  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = \pi/3$  \*);

в) Выясните, для каких  $\alpha$  и  $\beta$  существует такой четырехугольник, и выразите через  $\alpha$  и  $\beta$  отношение его сторон.

M922. Докажите, что уравнение

$$\sin^p x + \cos^q x = 1,$$

где  $p$  и  $q$  — положительные числа, имеет решение на интервале  $0 < x < \pi/2$  тогда и только тогда, когда  $(p-2)(q-2) < 0$  или  $p = q = 2$ .

*А. М. Седлецкий*

M923. Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость численно равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

M924. Каждые две из  $n$  точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник  $ABC$  с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях  $AB, BC, CA$  или  $AC, CB, BA$  (например, на рисунке 1 всего три ориентированных треугольника из 10).

а) Объясните, как расставить стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б) \* Каково наибольшее возможное число ориентированных треугольников (для каждого  $n$ )? (Нарисуйте соответствующие примеры для  $n = 4, 5$  и  $6$ .)

*И. Цаленчук, ученик 10 кл.*

M925. (Эволюция кляксы.) На белой плоскости расположена синяя фигура  $K_0$ . Из нее получается новая синяя фигура  $K_1$  по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам  $M$  плоскости: если не менее половины площади круга радиуса 1 с центром в точке  $M$  занято синим цветом, то точка  $M$  становится синей, а если менее половины — то белой \*\*). На следующем шагу из

\* ) Близкие к а) и б) задачи предлагались на вступительных экзаменах 1984 года на экономическом факультете МГУ.

\*\* ) Предполагается, что получающиеся на каждом шагу фигуры имеют площадь; так будет, например, если фигура  $K_0$  ограничена отрезками прямых и дугами окружностей.



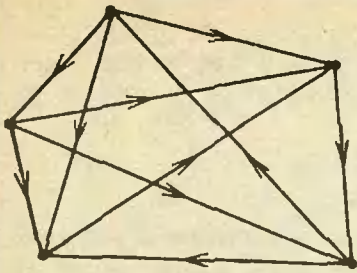
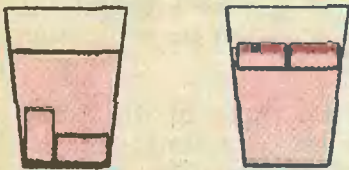


Рис. 1.



а)

б)

Рис. 2.

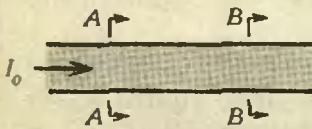


Рис. 3.

полученной синей фигуры  $K_1$  по тому же правилу получается фигура  $K_2$ , затем из нее —  $K_3$  и т. д. Докажите, что а) для произвольной ограниченной фигуры  $K_0$ , начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если  $K_0$  — круг радиуса 100, то это случится не позже чем через миллион шагов.

А. Л. Тоом

**Ф933.** Два куса сахара можно поместить в стакан с чаем различными способами. Можно просто положить сахар на дно (рис. 2, а), а можно установить куски «враспор», если стакан имеет коническую форму (рис. 2, б). В каком случае сахар растворится скорее, если чай не перемешивать?

Л. А. Ашкинази

**Ф934.** Теплоизолированный сосуд разделен на две части легким поршнем. В левой части сосуда находится  $m_1=3$  г водорода при температуре  $T_1=300$  К, в правой части —  $m_2=16$  г кислорода при температуре  $T_2=400$  К. Поршень слабо проводит тепло, и температура в сосуде постепенно выравнивается. Какое количество тепла отдаст кислород к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться?

З. А. Рафаилов

**Ф935.** По длинному прямому проводнику постоянного сечения течет ток  $I_0$ . На участке  $AB$  проводника (рис. 3) его удельное сопротивление уменьшается от  $\rho_1$  в сечении  $A-A$  до  $\rho_2$  в сечении  $B-B$ . Какой по величине и знаку объемный заряд образуется на участке  $AB$ ?

В. В. Можжев

**Ф936.** По длинному сверхпроводящему соленоиду с индуктивностью  $L_0=0,1$  Гн, содержащему  $N=200$  витков, течет ток  $I_0=0,1$  А. Издали к соленоиду подносят замкнутый проводящий виток того же радиуса, что и витки соленоида; индуктивность витка  $L_1=1 \cdot 10^{-3}$  Гн. Виток вставляют между витками соленоида соосно с ними. Как изменится ток, текущий по соленоиду? Как изменится энергия системы?

**Ф937.** На вертикальной стене нарисован человечек «ростом»  $h=20$  см, голова человечка находится на высоте  $H=2$  м над полом. При помощи линзы с фокусным расстоянием  $F=0,1$  м получают изображение человечка на полу. Найти размер наиболее четкого изображения.

А. Р. Зильберман

## Problems

M921—M925; P933—P937

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones.

**M921.** The angles  $\hat{A}=\alpha$  and  $\hat{B}=\beta$  of the convex quadrilateral  $ABCD$  are known; its doubled area equals  $AB \cdot CD + BC \cdot AD$ . Find the ratios of its sides  $AB:BC:CD:DA$  if

but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS** (or **MATHEMATICS**).

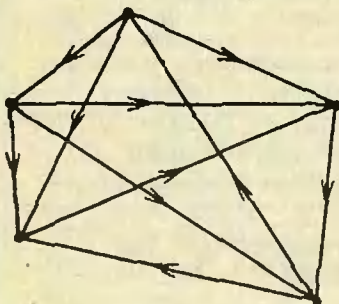


Fig. 1.

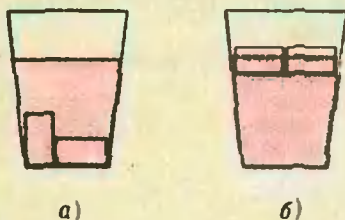


Fig. 2.

- a)  $\alpha = 5\pi/12$ ,  $\beta = 7\pi/12$ ; b)  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = \pi/3$ .  
 c) Find the values of  $\alpha$  and  $\beta$  for which such a quadrilateral exists and express  $\alpha$  and  $\beta$  in terms of the sides' ratio.

M922. Prove that the equation

$$\sin^p x + \cos^q x = 1,$$

where  $p$  and  $q$  are positive numbers, has a solution on the interval  $0 < x < \pi/2$  if and only if  $(p-2)(q-2) < 0$  or  $p=q=2$ .

A. M. Sedletski

M923. Prove that the area of a cube's projection on any plane is equal to the length of its projection on perpendiculars to the plane.

M924. Any two of  $n$  points (no three of which are colinear) are joined by a line segment; all the segments are supplied with arrows. The triangle  $ABC$  with vertices at these points is called oriented, if the arrows determine the directions  $AB, BC, CA$  or the directions  $AC, CB, BA$  (thus, three of the ten triangles on Fig. 1 are oriented).

a) Explain how the arrows should be oriented in order to avoid creating any oriented triangles whatsoever.

b)\* What is the largest possible number of oriented triangles (for each  $n$ )? Draw the appropriate examples for  $n=3, 4$ , and  $6$ .

I. Tsaienchuk, 10th grade student

M925. (Ink blot evolution). A blue figure  $K_0$  is drawn on a white plane. A new blue figure  $K_1$  is obtained from it according to the following rule, applied simultaneously to all points  $M$  of the plane: if less than half of the area of the circle of radius 1 and centre  $M$  is blue, then the point  $M$  must become blue, otherwise it must become white\*). At the next step the figure  $K_2$  is obtained from  $K_1$  in the same way, etc. Prove that a) for any bounded figure  $K_0$  the entire plane will become white after a finite number of steps; b) if  $K_0$  is the circle of radius 100, this will happen no later than in one million steps.

A. L. Toom

P933. Two lumps of sugar may be placed into a cup of tea in different ways. The lumps may simply be dropped on the bottom of the cup (Fig. 2, a), or, if the cup is cone-shaped, placed so that they hold up each other in the cup's middle (Fig. 2, b). In which case will the lumps dissolve more rapidly, if the tea is not stirred?

L. A. Ashkinazi

P934. A heatisolated vessel is divided into two sections by a light piston. The left section contains

\* It is assumed that the area of the figures obtained at each step is always defined; this will be the case if  $K_0$  is bounded by straight lines and circular arcs.



$m_1=3$  g hydrogen at temperature  $T_1=300$  K, the right section contains  $m_2=16$  g oxygen at temperature  $T_2=400$  K. The piston weakly conducts heat, so that the temperature in the sections gradually equalizes. How much heat will the oxygen have released at the moment when the piston stops moving?

Z. A. Rafailov

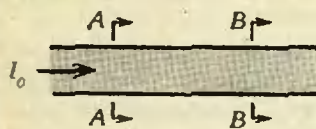


Fig. 3.

**P935.** A direct current of  $I_0$  flows along a rectilinear wire of constant section. Along the segment  $AB$  of the wire (Fig. 3) its specific resistance decreases from  $\rho_1$  at the section  $A-A'$  to  $\rho_2$  at the section  $B-B'$ . What is the absolute value and the sign of the charge that forms along the segment  $AB$ ?

V. V. Mozhaev

**P936.** A current of  $I_0=0,1$  A flows along a long rectilinear superconducting coil of inductivity  $L_0=0,1$  with  $N=200$  loops. A closed conducting loop for the same radius as the loops of the coil is brought from a distance and placed between the solenoid's loops so as to have a common axis with them. The new loop's inductivity is  $L_1=1 \cdot 10^{-3}$  Hn. How will the current flowing in the solenoid change? How will the energy of the system change?

**P937.** A human being of «height»  $h=20$  cm is drawn on a vertical wall so that its head is at the altitude  $H=2$  m above floorlevel. An image of the human being is obtained on the floor by means of a lens of focal distance  $F=0,1$  m. Find the size of the clearest possible image.

A. R. Zilberman

## Решения задач

M901—M904; Ф913—Ф916

**M901.** Биссектрисы  $AK$  и  $BM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что если  $OK=OM$ , то либо углы  $A$  и  $B$  треугольника равны, либо угол  $C$  равен  $60^\circ$ .

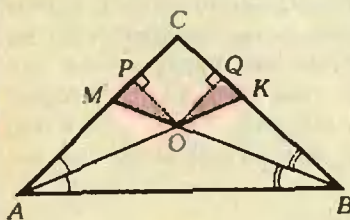


Рис. 1.

Опустим из точки  $O$  перпендикуляры  $OP$  и  $OQ$  на стороны  $AC$  и  $BC$ . Поскольку  $O$  — точка пересечения биссектрис, эти перпендикуляры имеют равные длины, следовательно, прямоугольные треугольники  $OMP$  и  $OKQ$  равны. Выразим их острые углы при вершинах  $M$  и  $K$  через углы треугольника  $ABC$ . Если точка  $P$  лежит на отрезке  $CM$  (рис. 1), то угол  $M$  треугольника  $OMP$ , как внешний угол треугольника  $AMB$ , равен  $\angle A + \frac{1}{2} \angle B$ ; если точка  $P$  лежит на отрезке  $AM$  (рис. 2), то этот угол равен углу  $AMB$ , то есть  $180^\circ - \angle A - \frac{1}{2} \angle B = -\frac{1}{2} \angle B + \angle C$ . Аналогичные две возможности имеются и для точки  $Q$ .

Таким образом, исходный треугольник удовлетворяет одному из двух равенств: либо  $\angle AMB =$

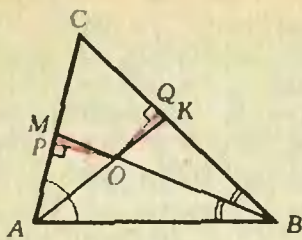


Рис. 2.

$= \angle AKB$ , то есть  $\frac{1}{2} \angle B + \angle C = \frac{1}{2} \angle A + \angle C$  или  $\angle A = \angle B$ ; либо  $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ , то есть  $\angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle A + \angle B = \frac{3}{2} (\angle A + \angle B) = 180^\circ$  или  $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 60^\circ$ .

В. Л. Гутенмахер

**М902.** *Натуральный ряд 1, 2, 3, ... разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на ее разность.*

◆ Обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  первые члены прогрессий, на которые разбит натуральный ряд, через  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — их разности. Произведение всех разностей входит в одну из прогрессий, то есть для некоторого  $i, 1 \leq i \leq n$ , и некоторого натурального  $k$

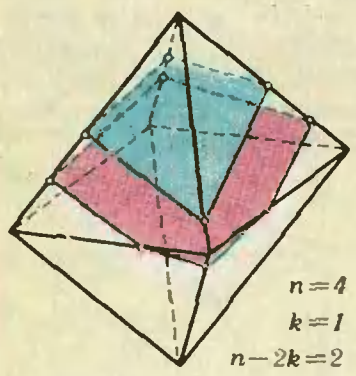
$$d_1 d_2 \dots d_n = a_i + k d_i$$

Из этого равенства следует, что  $a_i$  делится на  $d_i$ .

А. В. Келарев

**М903.** *Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с а) четным; б) нечетным числом сторон?*

◆ а) Ответ: существует. Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой многогранник, из каждой вершины которого выходит четное число ребер, например, октаэдр (см. рисунок).



Рассмотрим произвольное сечение такого многогранника, не проходящее через вершины. Очевидно, его можно чуть-чуть пошевелить так, чтобы оно стало непараллельным ни одному из ребер многогранника, а число его сторон осталось прежним. Будем теперь параллельно перемещать плоскость сечения. Тогда число его сторон будет изменяться только при переходе через вершины, причем каждый раз будет проходиться только одна вершина. Если в ней сходится четное число  $n$  ребер и  $k$  из них пересекали плоскость сечения до перехода через эту вершину (а значит,  $n - k$  — после перехода; см. рисунок), то число вершин сечения при этом переходе изменится на  $n - 2k$  и следовательно, его четность сохранится. А поскольку в конце концов плоскость сечения не будет пересекать ни одно из ребер, число сторон сечения должно оставаться четным все время, за исключением моментов прохождения вершин.

б) Ответ: не существует. Из решения задачи а) следует, что если у всех сечений многогранника, не проходящих через вершины, число сторон имеет одинаковую четность (в частности, нечетно), то из каждой вершины выходит четное число ребер. Но тогда, как было показано там же, число сторон у любого такого сечения должно быть четно.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

**М904.** *Для каждого натурального числа*  
 $A = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$   
*(с десятичной записью  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ) положим*

◆ а) Докажем, что если десятичная запись числа  $A$  содержит не менее двух знаков и  $A \neq 19$ , то

$$D(A) < A.$$

Пусть  $A = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0, a_n \geq 1$ , тогда  $A \geq 10^n$ . В то же время

$$D(A) = a_n + 2a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \dots + 2^{n-1} a_1 + 2^n a_0$$

Например,  $D(1985) = 1 + 2 \times 9 + 2^2 \cdot 8 + 2^3 \cdot 5 = 91$ ,

$$D(91) = 9 + 2 \cdot 1 = 11,$$

$$D(11) = 3.$$

а) Докажите, что для любого натурального  $A = A_0$  в последовательности  $A_1 = D(A_0)$ ,  $A_2 = D(A_1)$ , ... встретится число  $A^* = A_k < 20$ , для которого  $D(A^*) = A^*$ .

б) Чему равно  $A^*$  для  $A = 19^{85}$ ?

$$D(A) = a_n + 2a_{n-1} + \dots + 2^n a_0 \leq 9 + 2 \cdot 9 + \dots + 2^n \cdot 9 = 9(2^{n+1} - 1) < 18 \cdot 2^n < 10^2 \cdot 2^{n-2}.$$

Следовательно,  $D(A) < A$  при  $n \geq 2$ . При  $n = 1$ , то есть для  $A = 10a_1 + a_0$ , имеем:

$$A - D(A) = 10a_1 + a_0 - a_1 - 2a_0 = 9a_1 - a_0 > 0$$

при всех значениях  $a_1$  и  $a_0$ , кроме  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 9$  ( $A = 19$ ), а  $D(19) = 19$ . Наконец, при  $n = 0$ , то есть для однозначных чисел  $A$ , очевидно,  $D(A) = A$ .

Таким образом, последовательность  $A = A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , ... будет строго убывать, пока в ней не встретится число  $A_k = A^*$ , равное 19 или однозначное; для этого числа  $D(A^*) = A^*$ .

б) Ответ:  $A^* = 19$ . Докажем, что если число  $A$  делится на 19, то и  $D(A)$  делится на 19. Отсюда вытекает, что для  $A = 19^{85}$  число  $A^*$  делится на 19, а так как в силу утверждения а)  $A^* < 20$ , это возможно только при  $A^* = 19$ .

Для любого числа  $A = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0$  рассмотрим разность

$$2^n A - D(A) = (2^n - 1)a_n + 2(2^{n-1} - 1)a_{n-1} + \dots + 2^{n-1} \cdot (2 - 1)a_1.$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства делится на 19, так как  $20^k - 1 = 19 \cdot (20^{k-1} + 20^{k-2} + \dots + 1)$ , поэтому, если  $A$  делится на 19, то и  $D(A)$  тоже делится на 19.

Е. И. Гурвич, А. Л. Федоров

Ф913. С горизонтальной поверхности земли бросили под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $v_1 = 12$  м/с комок сырой глины. Одновременно комок вдвое большей массы бросили навстречу первому под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту, причем начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости. В результате столкновения комки слиплись. Найти скорость (по модулю) упавшего на землю слипшегося комка.

Рассмотрим движение центра масс (ц. м.) комков. Скорость ц. м. непосредственно перед ударом о землю равна по модулю скорости ц. м. при бросании комков, причем

$$3m\bar{v} = m\bar{v}_1 + 2m\bar{v}_2, \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  — скорость ц. м. при бросании,  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  — скорости комков в этот момент,  $m$  — масса меньшего комка.

Поместим начало координат в точке бросания комка массы  $m$ , направив ось  $X$  горизонтально так, чтобы она проходила через точку бросания большего комка, а ось  $Y$  — вертикально вверх. Запишем равенство (1) в проекциях на оси  $X$  и  $Y$ , предварительно разделив обе части его на  $m$ :

$$3v_x = v_1 \cos \alpha - 2v_2 \cos \beta, \quad (2)$$

$$3v_y = v_1 \sin \alpha + 2v_2 \sin \beta$$

(здесь  $v_x$  и  $v_y$  — проекции  $\bar{v}$  на оси  $X$  и  $Y$ ). Скорость  $v_2$  найдем из условия, что в точке столкновения, которое произошло через время  $t$ , координата по оси  $Y$  у комков одна и та же:

$$v_1 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = v_2 t \sin \beta - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$v_2 = v_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = v_1 \sqrt{3}.$$

Подставляя найденное выражение для  $v_2$  в (2), получаем:

$$v_x = -\frac{5}{6} v_1, \quad v_y = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1.$$



Таким образом, скорость слипшегося комка при ударе о землю —

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} v_1 \approx 14 \text{ м/с.}$$

В. И. Чивилёв

Ф914. В закрытом сосуде объёма  $V = 33,6 \text{ дм}^3$  находится азот и  $\nu = 1$  моль воды. При температуре  $t = 100^\circ\text{C}$  давление в сосуде равно  $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Определить количество азота в сосуде.

◆ Давление  $p$  в сосуде складывается из парциальных давлений азота  $p_n$  и паров воды  $p_0$ . Максимальное возможное значение  $p_n$  — это давление насыщенных водяных паров  $p_n$  при данном значении температуры. При  $T = 373 \text{ К}$   $p_n = 10^5 \text{ Па}$ . Посмотрим, каким должно быть количество  $\nu_1$  пара в сосуде, чтобы создать давление  $p_n$ :

$$p_n V = \nu_1 RT \Rightarrow \nu_1 = \frac{p_n V}{RT} = \frac{10^5 \cdot 33,6 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 373} \text{ моль} \approx 1,1 \text{ моль.}$$

Значит, при испарении  $\nu = 1$  моль воды образовавшийся пар будет не насыщенным. Давление этого пара —

$$p_n = \nu \frac{RT}{V} \approx 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Следовательно, парциальное давление азота в сосуде —

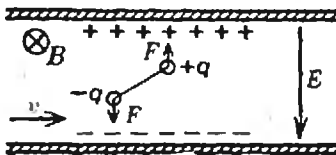
$$p_n = p - p_n \approx 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па,}$$

и количество азота в сосуде —

$$\nu_n = \frac{p_n V}{RT} \approx 1,2 \text{ моль.}$$

С. М. Коршунов

Ф915. Жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  протекает между пластинами изолированного плоского конденсатора со скоростью  $v$ . Перпендикулярно скорости  $\vec{v}$  и параллельно пластинам направлено магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Определить напряжение на пластинах конденсатора. Расстояние между пластинами  $d$ .



◆ На разноименные заряды движущихся диполей диэлектрика со стороны магнитного поля действуют силы Лоренца, направленные в противоположные стороны (см. рисунок). Это приводит к поляризации диэлектрика, и в результате у верхней и нижней пластин конденсатора в диэлектрике будут существовать равные по абсолютной величине поверхностные заряды противоположных знаков. Эти поляризационные заряды создают электрическое поле.

Пусть напряженность этого поля равна  $E$  (на рисунке  $\vec{E}$  направлено сверху вниз). Тогда сила, действующая на положительный заряд движущегося диполя, равна

$$F = q(vB - E).$$

Согласно определению диэлектрической проницаемости эта сила должна быть в  $\epsilon$  раз меньше той силы  $F_0$ , которая действовала бы на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , в отсутствие диэлектрика. Но в отсутствие диэлектрика  $E = 0$ , и  $F_0 = qvB$ . Так что

$$F = \frac{F_0}{\epsilon} \Rightarrow q(vB - E) = q \frac{vB}{\epsilon},$$

откуда находим  $E$ :

$$E = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} vB.$$

Таким образом, разность потенциалов между пластинами конденсатора равна

$$U = Ed = \frac{t-1}{t} vBd.$$

Е. А. Ромишевский

Ф916. В схеме, приведенной на рисунке 1 ( $D$  — идеальный диод), ключ  $K$  замыкают на время  $\tau$ , а затем размыкают. В момент размыкания сила тока в катушке индуктивности равна  $I_0$ . Через сколько времени после размыкания ключа ток  $I_L$  в катушке достигнет максимального значения, если оно равно  $2I_0$ ? Построить график зависимости  $I_L$  от времени  $t$  ( $0 < t < \infty$ ).

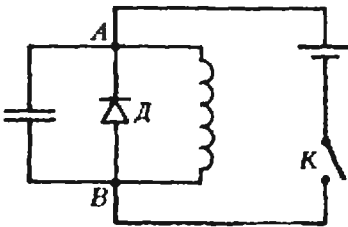


Рис. 1.

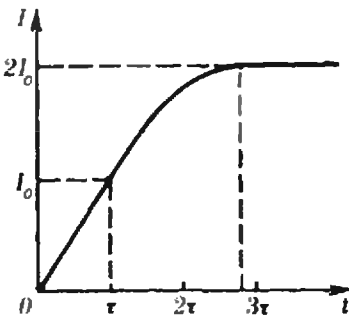


Рис. 2.

После замыкания ключа  $K$  за очень короткий промежуток времени напряжение на конденсаторе и на катушке индуктивности станет равным ЭДС источника  $\mathcal{E}$  (см. рис. 1:  $\mathcal{E} = \varphi_A - \varphi_B$ , ток через диод не течет). В течение времени  $\tau$  на конденсаторе будет сохраняться постоянный заряд  $q = C\mathcal{E}$ , а ток через катушку будет нарастать по линейному закону:

$$L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{L} t \quad (0 < t \leq \tau).$$

В момент  $t = \tau$ , согласно условию,  $i = I_0$ , то есть

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{L} \tau.$$

Если в этот момент разомкнуть ключ  $K$ , ток через катушку будет продолжать расти со временем за счет разрядки конденсатора, как это происходит в обычном колебательном контуре, то есть по закону синуса с периодом  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

Когда ток достигнет максимального значения, напряжение на катушке индуктивности, диоде, конденсаторе станет равным нулю, то есть конденсатор полностью разрядится. На основании закона сохранения энергии имеем:  $\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$ .

Учитывая, что  $I_{\max} = 2I_0 = \frac{2\mathcal{E}}{L} \tau$ , находим  $LC = 3\tau^2$ .

Значение функции  $y = \sin x$  изменяется от 0,5 до 1 при изменении аргумента от  $\pi/6$  до  $\pi/2$ , то есть за  $1/6$  часть периода. Поэтому время  $\Delta t$ , за которое сила тока в катушке изменяется от  $I_0$  до  $2I_0$ , равно  $T/6$ , то есть

$$\Delta t = \frac{\pi}{3} \tau \sqrt{3} \approx 1,8\tau.$$

В момент времени  $t = \tau + \Delta t \approx 2,8\tau$  потенциалы точек  $A$  и  $B$  сравниваются, сопротивление участка, содержащего диод, в направлении от  $B$  к  $A$  становится равным нулю. Таким образом, в последующие моменты времени через катушку индуктивности и диод будет течь постоянный ток  $I = 2I_0$ , заряд конденсатора будет равен нулю.

График зависимости  $I(t)$  приведен на рисунке 2.

Необходимо сделать еще одно важное пояснение. В момент времени  $t = \tau$  происходит плавный (то есть без скачка производной) переход с линейного участка на часть синусоиды. Это связано с тем, что производной  $di/dt$  пропорционально напряжение на катушке индуктивности  $U_L = LI'$ , которое в каждый момент времени равно напряжению на конденсаторе  $U_C = q/C$ . А так как заряд на конденсаторе скачком измениться не может, на графике  $I(t)$  не может быть изломов.

А. И. Куркинский, Е. А. Ромишевский



# Механическая работа и механическая энергия

О. Ю. ОВЧИННИКОВ

§ 1. В механике работа, совершаемая постоянной силой  $\vec{F}$  при перемещении тела на величину  $\vec{s}$ , равна произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла  $\alpha$  между векторами силы и перемещения:

$$A = F s \cos \alpha.$$

Такое понятие не всегда соответствует обыденному представлению о работе. Например, штангист, удерживающий груз на поднятых руках, или носильщик, несущий тяжелый чемодан, механической работы не совершают (объясните — почему?).

Когда действующая на тело сила не постоянна (меняется ее модуль или направление), работу такой силы можно найти следующим образом. Разобьем все перемещение тела на такие малые участки  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$ , чтобы на каждом из них силу можно было считать постоянной и равной соответственно  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Затем найдем работу на каждом участке:

$$A_1 = F_1 s_1 \cos \alpha_1,$$

$$A_2 = F_2 s_2 \cos \alpha_2, \dots,$$

$$A_n = F_n s_n \cos \alpha_n;$$

а полная работа будет равна сумме работ на отдельных участках:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

В тех случаях, когда известно, как изменяется от точки к точке проекция силы на направление перемещения  $F_{\parallel} = F \cos \alpha$ , работу можно найти графически (рис. 1). Полная работа на участке  $BC$  численно равна площади фигуры  $BDEC$ .

Задача 1. Чему равна работа по равномерному подъему однородной гладкой цепочки на гладкий горизонтальный стол? Первоначальное положение цепочки указано на рисунке 2, а; ее длина  $l = 6$  м; масса  $m = 3$  кг.

В начальный момент на цепочку действует сила тяжести  $mg$ , и для ее удержания требуется сила

$$F_0 = mg.$$

По мере поднятия цепочки на стол сила, необходимая для поднятия, будет уменьшаться. Обозначим длину части цепочки, уже лежащей на столе, через  $x$  (рис. 2, б). В этот момент к цепочке надо приложить силу

$$F = mg - \frac{mg}{l} x.$$

Построим график зависимости  $F = F(x)$  (рис. 2, в). Тогда работа, которую совершит эта сила при равномерном подъеме всей цепочки, будет численно равна площади заштрихованного треугольника:

$$A = \frac{1}{2} mgl = 90 \text{ Дж.}$$

Заметим, что совершенная работа равна работе по подъему центра тяжести цепочки. Поскольку в началь-

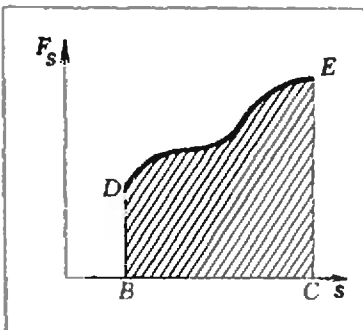


Рис. 1.

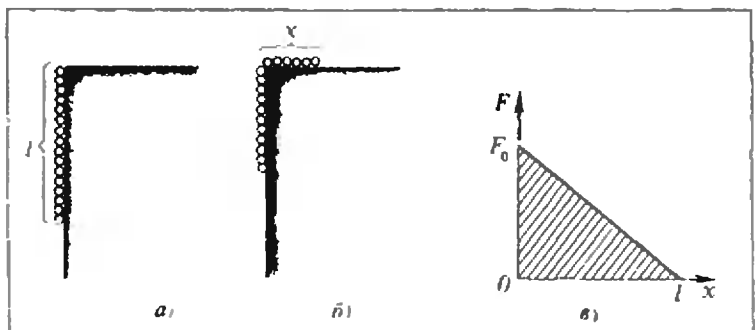


Рис. 2

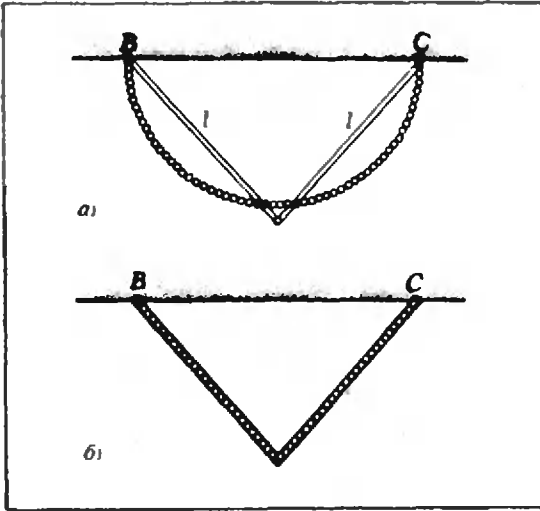


Рис. 3.

ный момент он находится на расстоянии  $l/2$  от поверхности стола, потребуется работа  $A = mg(l/2)$ .

**Задача 2.** К точкам  $B$  и  $C$ , находящимся на одной горизонтали, подвешены однородная цепочка длиной  $2l$  и система из двух стержней, соединенных шарниром, каждый из которых имеет длину  $l$  (рис. 3, а). Масса цепочки равна массе обоих стержней. Какой из центров тяжести — цепочки или системы стержней — находится ниже?

Под действием на цепочку таким образом, чтобы ее положение совпало с положением системы стержней (рис. 3, б). Очевидно, что в этом случае центры тяжести цепочки и стержней тоже совпадают. Поскольку для того чтобы перевести цепочку в новое положение потребовалось над ней совершить некоторую работу, можно утверждать, что ее новое положение центра тяжести выше прежнего.

Следовательно, первоначально центр тяжести цепочки находился ниже центра тяжести системы стержней.

**Задача 3.** В первом опыте пружину, имеющую жесткость  $k$  и длину в недеформированном состоянии  $l_0$ , растягивают до длины  $l$ . Во втором опыте эту пружину сначала разрезают на две равные части, затем берут одну из них и растягивают ее тоже до длины  $l$ . Определите работу, которую надо совершить в первом и во втором опытах.

Согласно закону Гука, при растяжении пружины на величину  $x$

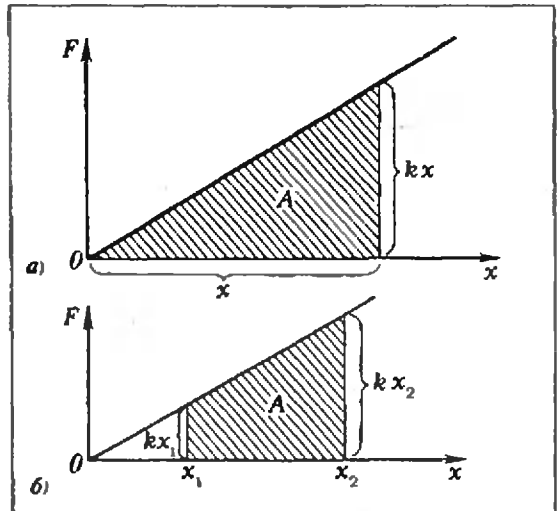


Рис. 4.

возникает сила упругости  $F_{\text{упр}} = -kx$  (знак «минус» говорит о том, что сила упругости стремится вернуть пружину в исходное состояние). Для того чтобы растянуть пружину, к ней надо приложить внешнюю силу  $\vec{F}$ , равную по модулю силе упругости, но противоположную ей по направлению:

$$F = -F_{\text{упр}} = kx.$$

Построим график зависимости  $F = F(x)$  (рис. 4, а) и по нему найдем работу, которую должна совершить внешняя сила для растяжения недеформированной пружины на величину  $x$ :

$$A = \frac{1}{2} (kx)x = \frac{kx^2}{2}.$$

В случае, когда пружина уже была растянута на величину  $x_1$ , а теперь ее надо растянуть до  $x_2$ , работа внешней силы будет равна (рис. 4, б)

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. В первом опыте для растяжения целой пружины с жесткостью  $k$  из недеформированного состояния до длины  $l$  необходимо совершить работу

$$A_1 = \frac{kx^2}{2} = \frac{k(l-l_0)^2}{2}.$$

Во втором опыте до той же длины  $l$  растягивают лишь половину пружины так, что удлинение  $x_2 = l - l_0/2$ . Кроме того, жесткость половины пружины не такая, как жесткость целой пружины: она в два раза больше (покажите это самостоятельно). Поэтому во втором опыте необходимо совершить работу

$$A_2 = \frac{(2k)x_2^2}{2} = \frac{(2k)(l-l_0)/2)^2}{2} = k\left(l - \frac{l_0}{2}\right)^2.$$

§ 2. В механике принято различать кинетическую энергию, обусловленную движением, и потенциальную, определяемую взаимным расположением тел системы или частей одного и того же тела.

Кинетическая энергия тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $v$ , равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в поле тяжести на высоте  $h$  над нулевым уровнем, равна

$$E_p = mgh,$$

а потенциальная энергия упруго деформированного тела равна

$$E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Между понятиями «механическая работа» и «механическая энергия» есть тесная связь. Работа равнодействующей сил, приложенных к системе, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

Работа сил тяжести или упругости, действующих в системе, равна взятому с противоположным знаком изменению потенциальной энергии системы:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}).$$

**Задача 4.** На рогатке закреплена длинная (по сравнению с размерами рогатки) резина с жесткостью  $k$ . Найдите максимальную скорость камня массой  $m$ , выпущенного из рогатки, если предварительно его оттянули на расстояние  $x$  (рис. 5).

Поскольку резина длинная, можно считать, что на камень действуют две параллельные силы упругости резины  $\vec{F}$ . При оттягивании камня на расстояние  $x$  суммарное удлинение пружины будет  $2x$ , и модуль силы упругости  $F = k(2x) = 2kx$ .

При возвращении в исходное недеформированное состояние резины силы упругости, действующие на камень, совершат работу

$$A = 2 \frac{(2kx)x}{2} = 2kx^2.$$

За счет этой работы камень приобретет кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом,

$$2kx^2 = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = 2x\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

**Задача 5.** Какая работа будет совершена силой  $F = 30$  Н при подъеме тела массой  $m = 2$  кг на высоту  $h = 20$  м?

Согласно определению, работа приложенной к телу силы равна

$$A = Fh = 600 \text{ Дж.}$$

С другой стороны, при подъеме тела на высоту  $h$  против силы тяжести  $mg$  совершается работа

$$A' = mgh = 400 \text{ Дж.}$$

Конечно же, ничего странного в расхождении полученных результатов нет. Дело в том, что  $A'$  — это минимальная работа, которую нужно совершить для поднятия тела. За счет этой работы увеличивается его потенциальная энергия в поле тяжести Земли:

$$\Delta E_p = mgh = 400 \text{ Дж.}$$

Остальная же часть работы идет на увеличение кинетической энергии тела (тело движется с ускорением, а почему?):

$$\Delta E_k = A - A' = 200 \text{ Дж.}$$

**Задача 6.** На невесомой конструкции из стержней, соединенных шарнирно, подвешен груз массой  $m$  (рис. 6). Чему равно натяжение нити?

Мысленно уменьшим длину нити на величину  $x$ , настолько малую, чтобы изменением силы натяжения нити можно было пренебречь. Тогда груз поднимется на высоту  $2x$  (покажите это).

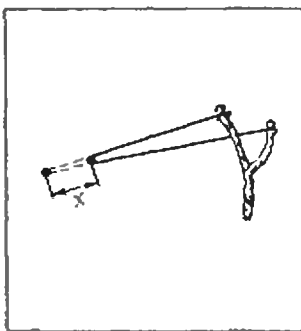


Рис. 5.

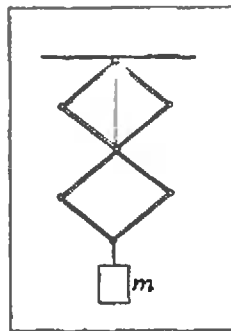


Рис. 6.



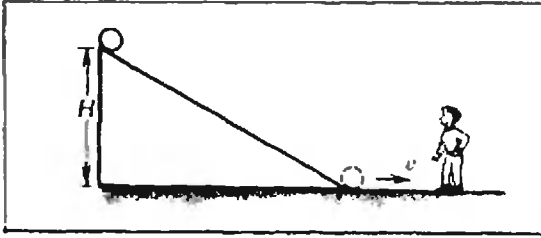


Рис. 7

Работа силы натяжения нити при этом будет равна

$$A = F_n x,$$

а потенциальная энергия груза в поле тяжести Земли изменится на

$$\Delta E_p = mg(2x) = 2mgx.$$

Таким образом,

$$F_n x = 2mgx,$$

откуда

$$F_n = 2mg.$$

§ 3. Энергия принадлежит к тем немногим физическим величинам, для которых выполняются законы сохранения.

В частности, если система тел замкнута и тела взаимодействуют друг с другом только силами тяготения и упругости, то полная механическая энергия системы (то есть сумма кинетической и потенциальной энергий) остается постоянной. Действие же силы трения приводит к тому, что часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию системы. Но и в этом случае сумма всех видов энергии системы сохраняется неизменной.

**Задача 7.** Мальчик на коньках разгоняется до скорости  $v$  и вкатывается на горку, покрытую льдом. До какой высоты, считая от основания горки, он сможет подняться, если коэффициент трения  $\mu$ , а угол наклона горки к горизонту  $\alpha$ ?

В начальный момент мальчик обладает кинетической энергией  $mv^2/2$ , а в конечный момент — потенциальной энергией  $mgh$  (здесь  $m$  — масса мальчика,  $h$  — искомая высота подъема). За счет уменьшения полной механической энергии совершается работа против силы трения  $F_{тр} = \mu mg \cos \alpha$ :

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = (\mu mg \cos \alpha) \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Отсюда находим искомую высоту  $h$ :

$$h = \frac{v^2}{2g(1 + \mu \cot \alpha)}.$$

**Задача 8.** Камень массой  $m$  соскальзывает с гладкой горки высотой  $H$ . Рассмотрим этот процесс в двух различных инерциальных системах отсчета. С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе потенциальная энергия камня  $mgH$  переходит в кинетическую энергию  $mv^2/2$ , так что после соскальзывания с горки камень имеет скорость  $v$  (рис. 7). Наблюдатель, находящийся в системе отсчета, движущейся со скоростью  $u$  вправо, скажет, что вначале у камня есть потенциальная энергия  $mgH$  и кинетическая энергия  $mv^2/2$ , а в конце нет ни той ни другой. Куда же «пропала» энергия?\*)

Сразу же скажем, что закон сохранения энергии выполняется и в этом случае. Причина сформулированного в условии парадокса в том, что рассуждения проводились для незамкнутой системы — одного камня, а Земля, с которой камень взаимодействует, не учитывалась. Исправим эту ошибку.

а) В неподвижной системе отсчета (связанной с центром масс системы камень — Земля) в начальный момент камень и Земля покоятся, и вся энергия равна потенциальной энергии системы. В конечный момент камень приобретает скорость  $\vec{v}$ , а Земля — скорость  $\vec{u}$ , которую можно найти из закона сохранения импульса:

$$mv - Mu = 0,$$

откуда

$$u = \frac{m}{M} v,$$

где  $M$  — масса Земли.

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Поскольку масса камня ничтожно мала по сравнению с массой Земли, величиной  $m/M$  по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда получим

$$mgH = \frac{mv^2}{2},$$

\*) Аналогичные вопросы подробно разбираются в статье В. А. Орлова «Парадокс «большого» тела», опубликованной в третьем номере журнала за 1978 год. (Примеч. ред.)

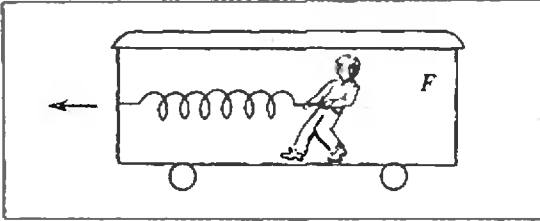


Рис. 8

что целиком соответствует условию задачи.

б) В движущейся системе отсчета в начальный момент общая энергия системы равна  $mgH + mv^2/2 + Mv^2/2$ , а в конечный она равна  $Mu^2/2$ . Из закона сохранения импульса

$$mv + Mv - Mu = 0$$

получаем

$$u = v \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

и

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \left( 2 + \frac{m}{M} \right).$$

Тогда из закона сохранения энергии

имеем

$$mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \left( 2 + \frac{m}{M} \right),$$

или, пренебрегая величиной  $m/M$  по сравнению с двойкой,

$$mgH = \frac{mv^2}{2}$$

— тот же самый результат, что и с точки зрения неподвижного наблюдателя!

#### Упражнения

1. Тело массой  $M=990$  г лежит на горизонтальной плоскости. В него попадает пуля массой  $m=10$  г, летящая горизонтально со скоростью  $v=100$  м/с, и застревает в нем. Какой путь пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между ним и плоскостью  $\mu=0,05$ ?

2. В вагоне равномерно идущего поезда стоит человек, натягивающий пружину с силой  $\vec{F}$  (рис. 8). Поезд прошел путь  $l$ . Какую работу при этом совершил человек в системе отсчета, связанной с поездом, и в системе отсчета, связанной с Землей?

Школа в «Кванте»

## Избранные школьные задачи

### Восьмой класс

1. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}.$$

2. а) Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 7, такое, что сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 7.

б) Докажите, что среди любых 13 последовательных натуральных чисел найдется число с суммой цифр, делящейся на 7.

3. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ , точка  $K$  лежит на  $AM$ , причем  $AK/AM=1/3$ . Через точку  $K$  и вершину  $B$  проведена прямая, пересекающая  $AC$  в точке  $L$ . Найдите площадь треугольника  $AKL$ , если  $S_{ABC}=S$ .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ xy + xz + yz = 3. \end{cases}$$

5. Впишите в данный острый угол треугольник наименьшего периметра, одна из вершин которого совпадает с данной точкой  $A$  внутри угла, а вершины  $B$  и  $C$  лежат на сторонах угла.

### Девятый класс

6. Докажите, что при целых  $x, y, z$  число  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  делится на  $x + y + z$ .

7. В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AM$  и  $BN$ , причем  $|AM|=m_1$ ,  $|BM|=m_2$  и  $S_{ABC}=2m_1m_2/3$ . Найдите  $|AB|$ .

8. Какое из чисел больше

$$2^{2^{500}} \text{ или } 3^{3^{500}}?$$

9. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба с ребром  $a$ .

10. Решите уравнение

$$\sqrt{(17-x^2)} = (3-\sqrt{x})^2.$$

### Десятый класс

11. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 4x = 2 \sin^3 x \cdot \cos 4x.$$

12. Какое из двух чисел больше

а)  $1,0001^{1,0002}$  или  $1,0002^{1,0001}$ ;

б)  $e^{\pi}$  или  $\pi^e$ ?

13. Точки  $M, N, P$  и  $Q$  — середины ребер  $AB, AD, SC$  и  $SD$  четырехугольной пирамиды  $SABCD$  объема  $V$ . Найдите объем треугольной пирамиды  $MNPQ$ , если известно, что  $S_{ABP} = S_{BCQ}$ .

14. Могут ли числа 3, 5 и 7 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

15. Докажите, что если сумма квадратов длин сторон некоторого четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

## Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

### Физика

#### Письменный экзамен

#### Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобратся в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

#### Вариант 1

1. Провод  $ACB$  изогнут так, что точки  $A$ ,  $C$  и  $B$  образуют правильный треугольник (рис. 1). К серединам сторон  $AC$  и  $BC$  под-

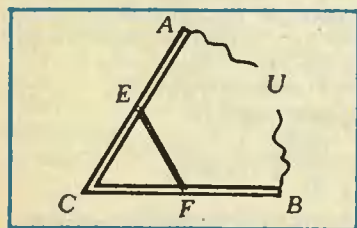


Рис. 1.

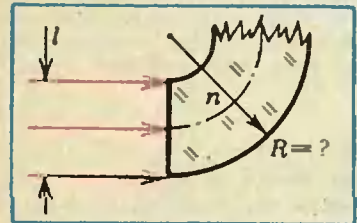


Рис. 4.

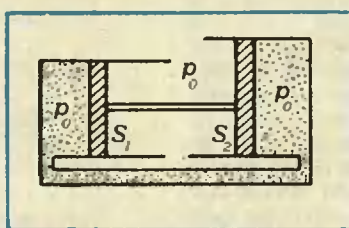


Рис. 2.

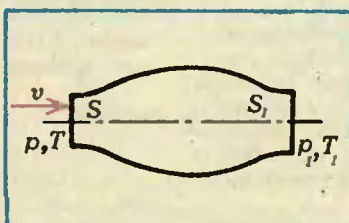


Рис. 5.

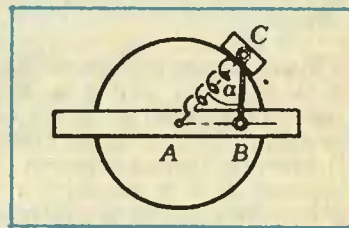


Рис. 3.

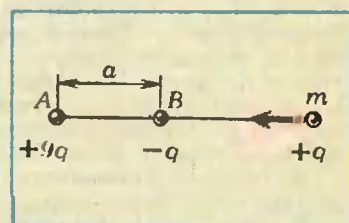


Рис. 6.

ключена перемычка  $EF$  из провода с вдвое меньшей площадью сечения. К точкам  $A$  и  $B$  приложено напряжение  $U$ . Найдите падение напряжения на перемычке.

2. Два закрепленных цилиндра, площади сечения которых равны  $S_1$  и  $S_2$ , соединены трубкой (рис. 2). Цилиндры перекрыты поршнями, жестко соединенными между собой. Объем газа, ограниченный поршнями, вначале был равен  $V$ , а давление внутри системы было равно атмосферному давлению снаружи  $p_0$ . Затем атмосферное давление изменяется до значения  $p_1$ . На какое расстояние сдвинется поршни? Температура постоянна. Трением пренебречь.

3. Колесо снабжено тормозом  $BC$ , который шарнирно закреплен в точке  $B$  на той же жесткой раме, что и ось колеса  $A$  (рис. 3). Растянутая пружина  $AC$  прижимает тормозную колодку  $C$  к ободу колеса так, что угол  $ACB$  равен  $\alpha$ . При вращении колеса по часовой стрелке сила трения, создаваемая колодкой тормоза, равна  $F_1$ . Коэффициент трения колодки об обод равен  $\mu$ . Найдите силу трения при вращении колеса против часовой стрелки.

4. Продолжите мысленно прямую, проходящую вдоль отвеса (висящей вертикально нити с грузиком). Оцените для средних широт, на каком расстоянии от центра Земли пройдет эта прямая.

5. Если в герметичный цилиндр вставить поршень, способный почти без трения скользить по стенкам цилиндра, и прикрепить к нему груз, то поршень сравнительно легко выскальзывает из цилиндра. Если же налить в цилиндр воду, то поршень держится несмотря на значительную массу груза. Объясните явление.

#### Вариант 2

1. Каким должен быть внешний радиус изгиба световода, сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления  $n$ , чтобы при диаметре световода  $l$  свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости сечения, распространялся, не выходя наружу через боковую поверхность (рис. 4)?

2. Через трубку переменно сечения продувают воздух (рис. 5). Входное отверстие имеет площадь  $S$ , выходное —  $S_1$ . На входе скорость воздуха постоянна и равна  $v$ , темпе-



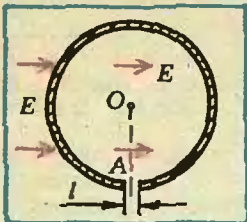


Рис. 7.

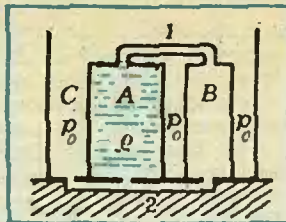


Рис. 8.

ратура  $T$ , давление  $p$ . На выходе температура  $T_1$ , давление  $p_1$ . Найдите скорость воздуха в выходном сечении.

3. В точках  $A$  и  $B$  (рис. 6) на расстоянии  $|AB|=a$  закреплены заряды  $+9q$  и  $-q$ . Вдоль прямой  $AB$  к ним движется частица массой  $m$ , имеющая заряд  $+q$ . Какую наименьшую скорость должна была иметь эта частица на очень большом расстоянии, чтобы она смогла достигнуть точки  $B$ ?

4. Оцените, при какой минимальной скорости ветра он может опрокинуть автобус.

5. Два одинаковых сосуда нагреваются до одной и той же температуры. При этом один сосуд ополаскивается горячей водой, а другой остается сухим. Затем оба сосуда ставятся на холодную воду, оба горлышком вниз. После их остывания уровни воды, втянутой в сосуды, заметно различаются. Объясните явление.

#### Вариант 3

1. Из одной точки вылетают одновременно две частицы с горизонтальными, противоположно направленными скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Через какой интервал времени угол между направленными скоростей этих частиц станет равным  $90^\circ$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

2. Жесткое тонкое непроводящее кольцо массой  $M$ , равномерно заряженное зарядом  $+Q$ , имеет в районе точки  $A$  небольшой зазор размера  $l$ , много меньшего, чем радиус кольца (рис. 7). Кольцо расположено в горизонтальной плоскости так, что может только свободно вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через центр кольца  $O$ . Покоившееся вначале кольцо пришло в движение после того, как было включено постоянное горизонтальное однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , перпендикулярное  $OA$ . Найдите максимальную величину скорости кольца.

3. Вертикально стоящие закрытые цилиндры  $A$  и  $B$  имеют одинаковую высоту  $H$  и площади дна  $S$  и  $S/2$  соответственно. Они закреплены на дне широкого открытого цилиндра  $C$  с площадью дна  $3S$  (рис. 8). В верхней части цилиндры  $A$  и  $B$  соединены трубкой  $1$ , а в нижней — через небольшие отверстия в дне все три цилиндра связаны друг с другом общим узким каналом  $2$ . Первоначально цилиндр  $A$  доверху наполнен водой, а отверстие в дне этого цилиндра закрыто. Найдите высоту уровня воды, установившегося в цилиндре  $C$  после открывания отверстия в цилиндре  $A$ . Атмосферное давление  $p_0$ , плотность воды  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ . Температура постоянна. Объемом трубки, канала и стенок сосудов пренебречь.

4. Оцените изменение объема футбольного мяча при сильном ударе.

5. Когда между лампочкой и линзой помещена прозрачная с плоскими стенками кювета

с водой, на экране видно резкое изображение спирали лампочки. Если же кювету убрать, изображение становится размытым. Объясните явление.

Публикацию подготовил  
Г. В. Меледин

## Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Теплоход прошел 6 км вверх против течения реки и затем прошел еще 27 км вниз по течению, затратив на все 1 час. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость реки 6 км/ч.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos x + \cos 3x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$3^x = 3 + 2(\sqrt{3})^x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_1(x-3)}{x-5} < 0.$$

5. В конус с радиусом основания  $R$  и осевым сечением, являющимся правильным треугольником, вписана правильная треугольная призма так, что одна ее боковая грань лежит в плоскости основания конуса, а две остальные вершины лежат на его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если ее высота равна  $\frac{2}{3}R$ .

#### Вариант 2

1. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 28, а сумма второго и третьего членов равна 12. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение

$$9^{\cos \frac{x}{3}} - 2 \cdot 3^{\cos \frac{x}{3}} = 3.$$

3. Решите уравнение

$$x\sqrt{x^2+16} = 8\sqrt{x^2}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_1 \frac{5x+4}{x-2} > \lg \frac{5}{4} \pi.$$

5. В куб с ребром длиной  $a$  вписана правильная шестиугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите объем призмы, если сторона ее основания в 3 раза меньше ребра куба.

### Физика

#### Задачи устного экзамена

1. Тело массой  $m=0,1$  кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной  $l=1$  м. Ось вращения расположена над полом на высоте  $H=2$  м. При прохождении нижнего по-



ложения нить обрывается, и тело падает на пол на расстоянии  $L=4$  м (по горизонтали) от точки обрыва. Определите силу натяжения нити в момент ее обрыва. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Два шара, имеющие одинаковый диаметр, связаны нитью и опускаются медленно и вертикально один над другим с постоянной скоростью в жидкости. Определите силу натяжения нити, если массы шаров  $m_1=2$  кг и  $m_2=1,6$  кг. Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>. Силой сопротивления жидкости пренебречь.

3. Воздух при температуре  $t_1=20$  °С имеет относительную влажность  $\varphi=70$  %. Сколько водяного пара сконденсируется из  $V=10$  м<sup>3</sup> воздуха, если температура воздуха понизится до  $t_2=10$  °С? Давление насыщенного пара при температуре  $t_1$  равно  $p_{н1}=2,3 \cdot 10^3$  Па, а при  $t_2$  —  $p_{н2}=1,2 \cdot 10^3$  Па. Универсальная газовая постоянная  $R=8,3$  Дж/(моль · К).

4. Колба с холодной водой, начальная температура которой  $t=5$  °С, закипает на плите через время  $\tau_1$ , а через  $\tau_2=10$  мин с начала нагревания вода полностью испаряется. Определите время  $\tau_1$ . Удельная теплоемкость воды  $c=4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды  $r=2,3 \cdot 10^6$  Дж/кг.

5. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным (рис. 1). Напряженность результирующего электрического поля справа от пластины  $E_1=3 \cdot 10^4$  В/м, а слева  $E_2=5 \cdot 10^4$  В/м. Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля,  $F=0,7$  Н.

6. Шарик массой  $m=2$  г, имеющий положительный заряд  $q$ , начинает скользить без начальной скорости из точки А по сферической поверхности радиуса  $R=10$  см (рис. 2). Потенциальная энергия взаимодействия заряда  $q$  и неподвижного отрицательного заряда  $Q$  в начальный момент равна  $W_A=-2 \cdot 10^{-3}$  Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд  $q$  находится в точке В, если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарiku, равна  $F=0,1$  Н. Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

7. Атом неона ионизируется при столкновении с электроном, если энергия последнего равна  $W=21,6$  эВ (энергия ионизации). Длина свободного пробега электрона в неоновой лампе между двумя последовательными соударения-

ми равна  $l=1$  мм. Расстояние между плоскими электродами лампы  $d=1$  см. Определите напряжение, при котором зажигается неоновая лампа (будет происходить процесс ионизации). Считать, что при ударе электроны полностью передают энергию атому неона. Заряд электрона  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $1$  эВ  $=1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

8. Катушка, имеющая  $N=100$  витков, расположена в однородном магнитном поле с индукцией  $B=10^{-2}$  Тл. Плоскости ее витков перпендикулярны линиям магнитной индукции, площадь одного витка  $S=10$  см<sup>2</sup>. Катушка присоединена к ballisticкому гальванометру так, что сопротивление всей цепи  $R=10$  Ом. При повороте катушки на угол  $\alpha$  через гальванометр проходит заряд  $q=5 \cdot 10^{-5}$  Кл. Определите угол  $\alpha$ .

9. Пропеллер, имеющий лопасти длиной  $l=5$  см, вращается с частотой  $n=0,1$  с<sup>-1</sup> перпендикулярно плоскости зеркала, которое движется с поступательной скоростью  $u=0,01$  м/с (рис. 3). На концы лопастей пропеллера нанесены точки А и В. Определите скорости изображений точек А и В в зеркале в тот момент, когда пропеллер проходит вертикальное положение.

10. При взаимодействии ядра изотопа лития  ${}^6_3\text{Li}$  и протона образуются две одинаковые частицы и выделяется энергия  $E_0=17,3$  МэВ. Определите частицу и энергию, которая выделится, если с протонами прореагируют ядра, содержащиеся в  $m=1$  г изотопа лития. Число Авогадро  $N_A=6 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>,  $1$  эВ  $=1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Публикацию подготовили  
И. А. Гладков, В. Ф. Панов

## Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Каждый вариант состоял из трех задач, содержащих в общей сложности 10 пунктов. Каждый пункт оценивался самостоятельно. Основу всех вариантов составляло исследование функций.

Вариант 1

1. Даны функции:  $f(x)=x^3-x$  и  $g(x)=x^3+x$ .

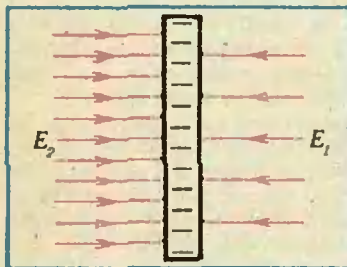


Рис. 1.

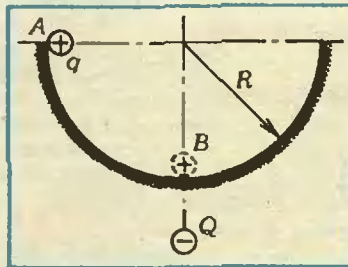


Рис. 2.

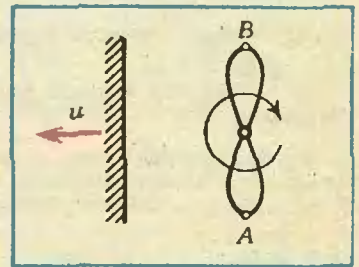


Рис. 3.



а) Решите уравнение

$$2f(x) + g(x) = 0.$$

б) При каких  $x$  функция  $y = f(x)g(x)$  принимает наименьшее значение?

в) Решите неравенство  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ .

г) При каких значениях  $a$  уравнение  $f(x) = ag(x)$  имеет ровно три корня?

2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  углы  $B$  и  $C$  при основании равны  $\alpha$ , длина отрезка  $BC$  равна 1, точка  $D$  на прямой  $AC$  такова, что  $|BC| = |BD|$ ,  $D \neq C$ .

а) Найдите  $L(\alpha)$ , где  $L(\alpha) = |AB| + |CD|$ .

б) При каком  $\alpha$  величина  $L(\alpha)$  принимает наименьшее значение?

в) Решите уравнение  $L(\alpha) = 3\sqrt{2}/2$ .

3. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+5}{3-x}$ .

а) Найдите область определения функции  $y = f(x)$ .

б) Решите уравнение  $f(x) = -1$ .

в) Найдите область значений функции  $y = f(x)$ .

В а р и а н т 2

1. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \ln\left(2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$ .

а) Найдите область определения данной функции.

б) Выразите  $x$  как функцию от  $y$ .

в) Найдите область значений функции  $y = f(x)$ .

г) Решите неравенство  $f(x) > 0$ .

2. Общее сопротивление некоторой электрической цепи, содержащей постоянное сопротивление  $R > 0$  и переменное сопротивление  $r > 0$ ,

$$\text{равно } S(r) = \frac{4R^2 + 3Rr}{3R + 2r}.$$

а) Чему равно  $r$ , если  $S(r) = \frac{15}{11}R$ ?

б) Исследуйте функцию  $S(r)$  на монотонность.

в) Какие значения может принимать  $S(r)$ ?

3. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + 3 \sin^2 x}$ .

а) Решите уравнение  $f(x) = -\frac{2}{13}$ .

б) Каков наименьший период данной функции?

в) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

Устный экзамен

1. Вычислите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\sin \alpha > 0$ .

2. Решите неравенство  $\frac{5x-3}{4-x} < 2$ .

3. Найдите область определения функции  $y = \sqrt{\log_2(x^2 - 1)}$ .

4. Постройте график функции  $y = \cos x + |\cos x|$ .

5. Решите уравнение  $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$ .

6. Что больше:  $\sin 1$  или  $\cos 1$ ?

7. Найдите функцию, обратную к функции  $y = \frac{2x+1}{x-2}$ .

8. Изобразите на координатной плоскости множество, задаваемое уравнением  $x|y| = |x|y$ .

9. Решите уравнение  $x^3 + x^2 = a$ , зная, что его три корня образуют арифметическую прогрессию.

10. Найдите наименьшее значение функции  $y = |\cos x| + |\cos 2x|$ .

11. Докажите неравенство  $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leq 1$ .

12. Вершины  $A$  и  $C$  прямоугольника  $ABCD$  лежат на различных ветвях гиперболы  $y = -\frac{1}{x}$ .

Стороны прямоугольника параллельны осям координат. Какие значения может принимать его площадь  $S$ ?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два теплохода движутся с одинаковыми скоростями по направлению к точке  $O$ , причем их траектории пересекаются в этой точке под углом  $\alpha = 60^\circ$ . Определите минимальное расстояние между теплоходами во время движения, если первоначально они находились от точки  $O$  на расстояниях  $l_1 = 20$  км и  $l_2 = 30$  км соответственно.

2. Тело массой  $m$  соскальзывает под действием силы тяжести с высоты  $h$  по поверхности произвольного профиля и вследствие трения останавливается. Какую работу надо совершить, чтобы втащить тело обратно?

3. Однородное тело плавает на поверхности керосина, причем объем выступающей над поверхностью части составляет  $\alpha = 8\%$  всего объема тела. Какая часть тела будет погружена при плавании в воде, если плотность воды  $\rho_w = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность керосина  $\rho_k = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>?

4. Объем  $V$  некоторой массы идеального газа изменяется с увеличением температуры по закону  $V = aT^n$ , где  $a$  и  $n$  — постоянные коэффициенты, причем  $n < 1$ . Как при этом изменяется давление: увеличивается или уменьшается?

5. Как зависит радиус пузырька, всплывающего со дна водоема, от расстояния  $h$  до поверхности воды?

6. До какого максимального потенциала можно зарядить уединенное проводящее тело, направив на него пучок электронов, летящих со скоростью  $v$ ? Массу  $m$  и заряд  $e$  электрона считать известными.

7. Две электрические лампочки номинальной мощностью  $P_1 = 40$  Вт и  $P_2 = 100$  Вт включены в сеть последовательно. На какой лампочке при этом выделяется большее количество теплоты и во сколько раз?

8. Точечный заряд влетает со скоростью  $v = 100$  м/с в однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  ( $E = 10^3$  В/м) перпендикулярно его силовым линиям. Каким (по модулю и направлению) постоянным магнитным полем можно компенсировать действие электрического поля на данный заряд так, чтобы он двигался прямолинейно?

9. Луч падает на плоскую стеклянную пластину под углом  $\alpha$ . Определите смещение луча внутри пластины, если показатель преломления стекла  $n$ , а толщина пластины  $h$ .

10. Точечный источник света находится на расстоянии  $l = 0,95$  м от экрана. На каком расстоянии от источника следует поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F = 0,16$  м и диаметром оправы  $D_1 = 0,1$  м, чтобы получить на экране ярко освещенный кружок диаметром  $D_2 = 0,025$  м?

Публикацию подготовили  
С. Г. Федин, С. В. Фокин

# Московский архитектурный институт

## Математика Устный экзамен

### 1. Упростите выражение

а)  $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}$ ;

б)  $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

при  $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$  и  $b > a > 0$ .

### 2. Вычислите без таблиц

а)  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ ;

в)  $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 87^\circ$ .

### 3. Докажите тождество

а)  $32 \sin^6 \alpha = 10 - 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha$ ;

б)  $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (60^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)$ ;

в)  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta + \cos^2 (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \times$   
 $\times \cos \beta \cdot \cos (\alpha - \beta)$ .

### 4. Решите уравнение

а)  $4^{-\frac{1}{x}} - 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$ ;

б)  $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$ ;

в)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x +$   
 $+ \cos 3x$ .

### 5. Решите неравенство

а)  $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$ ;

б)  $\log_{1+x} (2-x) < 1$ ;

в)  $\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$ .

### 6. Постройте график

а)  $|x| + |y| = 2$ ;

б)  $y = |x^2 + x| - x^2$ .

### 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$$

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. Поезд, масса которого  $m = 4 \cdot 10^5$  кг, движется со скоростью  $v = 10$  м/с. Перед остановкой поезд начинает тормозить. Сила торможе-

ния  $F = 2 \cdot 10^5$  Н. Какое расстояние пройдет поезд за  $t = 1$  мин после начала торможения?

2. Два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены нитью, перекинутой через неподвижный блок. Определите силу натяжения нити при движении грузов. Массой блока и трением в оси пренебречь.

3. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на  $\Delta l = 20$  см, если известно, что сила упругости пружины пропорциональна величине деформации и под действием силы  $F_0 = 30$  Н пружина сжимается на  $\Delta l_0 = 1$  см.

4. Шар массой  $m$  подвешен на нити длиной  $l$ . Нить отклоняют на угол  $\alpha = 90^\circ$  от вертикали и отпускают. Определите силу максимального натяжения нити.

5. Небольшое тело массой  $m$  соскальзывает без трения с вершины полушара радиусом  $R$ . На какой высоте тело оторвется от поверхности полушара?

6. Груз массой  $m = 2$  кг, падающий с высоты  $h = 5$  м, проникает в мягкий грунт на глубину  $l = 5$  см. Определите среднюю силу сопротивления грунта.

7. Брусок скользит сначала по наклонной плоскости длиной  $l = 50$  см и высотой  $h = 10$  см, а потом по горизонтальной поверхности (переход плавный), после чего останавливается. Определите коэффициент трения, считая его везде одинаковым, если по горизонтальной поверхности брусок проходит до остановки расстояние  $s = 1,5$  м.

8. Два куска льда массой  $m = 200$  г каждый при температуре  $T = 273$  К трутся друг о друга в вакууме с помощью мотора, развивающего мощность  $N = 10$  Вт. Через какое время лед растает? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$  Дж/кг.

9. Пылинка массой  $m = 10^{-8}$  г «висит» между пластинами горизонтального плоского воздушного конденсатора, к которому приложено напряжение  $U = 5$  кВ. Расстояние между пластинами  $d = 5$  см. Каков заряд пылинки?

10. Два заряда  $q_1 = 4 \cdot 10^{-8}$  Кл и  $q_2 = 2,5 \cdot 10^{-8}$  Кл находятся в воздухе на расстоянии  $r_1 = 1$  м друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния  $r_2 = 0,2$  м?

Публикацию подготовили  
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов,  
В. А. Смирнов

## Советуем купить

В 1986 году в научно-популярной серии для школьников «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» будут изданы следующие книги:

1. Л. А. Ашкинази. Вакуум для науки и техники.

2. К. Ю. Богданов. Физик в гостях у биолога

3. И. Д. Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора.

4. Занимательно о физике и математике.

5. В. М. Липунов. В мире двойных звезд.

6. Х. Рачлис. Физика в ванне.

7. А. А. Силин. Трение и мы.

8. В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах.

9. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии (планиметрия). Издание 2-е, переработанное и дополненное.

Заказы на эти книги принимают все книжные магазины.



**Механическая работа и механическая энергия**

1.  $l = \frac{m^2 v^2}{2\mu g(m+M)^2} = 1 \text{ м.}$

2. В обеих системах отсчета  $A=0$ .

Новосибирский государственный университет  
им. Левинского комсомола

**Физика**

**Вариант 1**

1.  $U_x = U/3$ .

2. Поршни сдвинуты вправо на расстояние  $x = (1 - p_0/p_1)V/(S_2 - S_1)$  при  $p_1 > p_0$ .

3. Пусть  $|BC|=l$ , сила натяжения пружины  $T$ , сила реакции опоры  $N$ , сила трения  $F$  (рис. 1). Колodka не вращается, если сумма моментов сил относительно оси, проходящей через точку  $B$ , равна нулю. При вращении колеса по часовой стрелке:

$$N_1 l \sin \alpha - T l \sin \alpha + \mu N_1 l \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$F_1 = \mu N_1 = \mu T \sin \alpha / (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

При вращении колеса против часовой стрелки:

$$N_2 l \sin \alpha - T l \sin \alpha - \mu N_2 l \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$F_2 = \mu N_2 = \mu T \sin \alpha / (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

В итоге имеем  $F_2 = F_1 \frac{\tan \alpha + \mu}{\tan \alpha - \mu}$  при  $\mu < \tan \alpha$ .

При  $\mu > \tan \alpha$  вращение колеса против часовой стрелки невозможно.

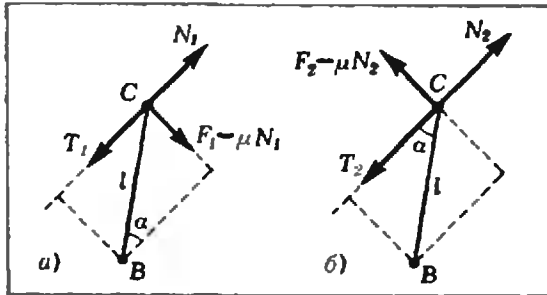


Рис. 1.

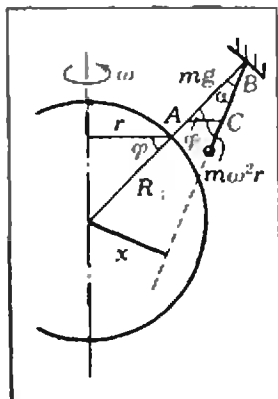


Рис. 2.

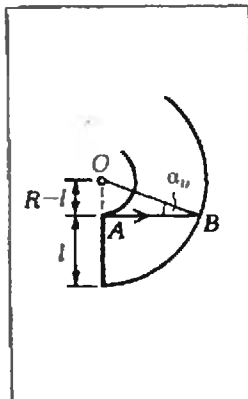


Рис. 3.

4. В треугольнике  $ABC$  (рис. 2)  $|AB|=mg$ ,  $|AC|=m\omega^2 r$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $r=R_3 \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — широта данного места),  $\widehat{ABC}=\alpha$  — малый угол отклонения отвеса от направления к центру Земли. По теореме синусов имеем

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\pi - (\varphi + \alpha))} \approx \frac{\alpha}{\sin \varphi}.$$

Отсюда

$$\alpha \sim R_3 \omega^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi / g = \omega^2 R_3 \sin 2\varphi / (2g),$$

и

$$x \sim R_3 \sin \alpha \sim R_3 \alpha \sim \frac{\omega^2 R_3^2 \sin 2\varphi}{2g} = \left( \frac{2\pi R_3}{T} \right)^2 \frac{\sin 2\varphi}{2g}.$$

При  $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$  м,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $T = 8,6 \cdot 10^4$  с и  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> получаем

$$x \sim 10 \text{ см.}$$

5. При движении поршня воздух сравнительно легко меняет свой объем и плотность, а вода — нет.

**Вариант 2**

1. Луч  $AB$  (рис. 3) образует наибольший угол падения  $\alpha_0$  на внешнюю поверхность. Свет не выйдет наружу, если угол  $\alpha_0$  — угол полного отражения, то есть если  $\sin \alpha_0 = 1/n$ . Из треугольника  $OAB$  имеем

$$\sin \alpha_0 = (R-l)/R,$$

откуда

$$R = l \frac{n}{n-1}.$$

2. См. решение задачи Ф920 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

3. Отталкивание зарядов сменяется притяжением на некотором расстоянии  $x$  от точки  $B$ , когда сила, действующая на движущуюся частицу, обращается в нуль:

$$9q^2/(x+a)^2 = q^2/x^2,$$

откуда однозначно следует, что  $x_1 = a/2$ . Чтобы дойти до точки  $B$ , нужна энергия

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{9q^2}{4\pi\epsilon_0(x_1+a)} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x_1} = \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{8q^2}{4\pi\epsilon_0 m a}}.$$

4. Введем размеры автобуса: высоту  $2b$ , ширину  $2a$ , длину  $l$ . Если плотность воздуха  $\rho$ , а скорость ветра  $v$ , то давление ветра создает силу, действующую на боковую поверхность автобуса,  $F \sim 2bl_1 v^2$ . Рассмотрим моменты сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точки соприкосновения переднего и заднего колес с дорогой:  $Fb \sim mga$ , где  $m$  — масса автобуса. Отсюда

$$v \sim \sqrt{\frac{mga}{2\epsilon l b^2}}.$$

При  $m \sim 10^4$  кг,  $a \sim b \sim 1$  м,  $l \sim 8$  м и  $\rho \sim 1,3$  кг/м<sup>3</sup>  $v \sim 70$  м/с.

5. В отличие от сухого сосуда в мокром вначале внешнее давление компенсируется как давлением воздуха, так и давлением паров воды. При охлаждении пары конденсируются.

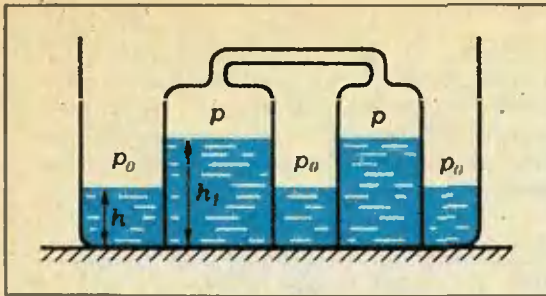


Рис. 4.

Это приводит к тому, что уровень воды в мокром сосуде оказывается выше, чем в сухом.

**Вариант 3**

1.  $t = \sqrt{v_1 v_2 / g}$ .

2. Очевидно, что сплошное равномерно заряженное кольцо в однородном электрическом поле вращаться не будет. Заменим мысленно кольцо с зазором на сплошное, где на месте зазора находится еще и отрицательный заряд  $-q$  той же линейной плотности, что и положительный на сплошном кольце:

$$-q = -\frac{Q}{2\pi R} l \quad (R - \text{радиус кольца}).$$

Скорость будет максимальной в положении равновесия, когда заряд  $-q$  (или зазор, что эквивалентно) опишет дугу  $R\pi/2$ . При этом изменение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta E_p = qER = QlE/(2\pi).$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{QlE}{2\pi},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{QlE}{\pi M}}.$$

3. Запишем условие равновесия воды (рис. 4):

$$p_0 + \rho gh = p + \rho gh_1.$$

Сохранение объема воды приводит к условию:

$$\frac{3}{2} h + \frac{3}{2} h_1 = H.$$

По закону Бойля—Мариотта имеем

$$\frac{p_0 HS}{2} = \frac{p(H-h)S}{2} + p(H-h_1)S.$$

Отсюда получаем

$$h = \frac{p_0}{4\rho g} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{4\rho g H}{3p_0} \right)^2} - 1 \right).$$

4. Согласно закону сохранения энергии,  $mv^2/2 \sim p\Delta V$  (изменением давления в мяче при ударе пренебрегаем). Скорость  $v$  оценим по расстоянию, на которое отлетит после удара мяч:  $l \sim v^2/g$ . Тогда  $mv^2/2 \sim mgl/2 \sim p\Delta V$ , откуда

$$\Delta V \sim mgl/(2p).$$

Полагая  $m=0,4$  кг,  $l=30$  м, разницу давлений внутри мяча и снаружи  $p=0,5 \cdot 10^5$  Па, получаем

$$\Delta V \sim 10^{-3} \text{ м}^3 = 1 \text{ л}.$$

5. Наличие преломляющей толстой пластины-юветы эквивалентно смещению источника света на некоторое расстояние. Когда ювету убирают, это приводит к расфокусировке изо-

бражения, так как резкое изображение спирали должно теперь получаться при другом положении экрана.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

**Математика**

**Вариант 1**

1. 30 км/ч.
2.  $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ;  $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$  ( $k, n \in \mathbb{Z}$ ).
3. {2}.
4. ]3; 4[  $\cup$  ]5; + $\infty$ [.
5.  $\frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$  \*).

**Вариант 2**

1.  $b_1=1, q=3$  или  $b_1=27, q=\frac{1}{3}$ .
2.  $x = -6\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
3.  $\{4\sqrt[3]{4}\}$ .
4.  $]-\frac{10}{9}; -\frac{4}{5}[$ .
5.  $a^3(3-\sqrt{2})/6$ . Указание. Высота призмы составляет часть диагонали куба. Поэтому, чтобы найти эту высоту, нужно определить расстояния от концов диагонали до оснований призмы. Плоскости оснований призмы отсекают от куба правильные треугольные пирамиды, причем основания призмы вписаны в основания этих пирамид. Поэтому достаточно найти их высоты.

**Физика**

1.  $T = mg \left( 1 + \frac{l^2}{2l(H-l)} \right) = 9 \text{ Н}$ .
2.  $T = (m_1 - m_2)g/2 = 2 \text{ Н}$ .
3.  $\Delta m = \frac{MV}{R} \left( \frac{p_{H1}}{T_1} - \frac{p_{H2}}{T_2} \right) \approx 0,027 \text{ кг}$  (здесь  $M=18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воды).
4.  $\tau_1 = \tau_2 \frac{c(t_k - t)}{c(t_k - t) + r} \approx 1,5 \text{ мин}$  (здесь  $t_k = 100^\circ \text{C}$  — температура кипения воды).
5.  $q = \frac{2F}{E_2 - E_1} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ .
6.  $W_B = W_A + 0,5(3mg - F)R = -4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ .
7.  $U > Wd/(el) = 216 \text{ В}$ .
8.  $\alpha = \arccos \left( 1 - \frac{qR}{BSN} \right) = 60^\circ$ .
9.  $v_B = 2\pi nl + 2u \approx 0,05 \text{ м/с}$ ;  $v_A = 2\pi nl - 2u \approx 0,01 \text{ м/с}$ .
10.  $E = E_0 m N_A / M = 2,4 \cdot 10^{11} \text{ Дж}$  (здесь  $M = 7 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса данного изотопа лития).

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

**Математика**

**Письменный экзамен**

**Вариант 1**

1. а)  $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ ; б)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ ;
- в)  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ ; г)  $a \in ]-1; 1[$ . Указание. При любом  $a$  уравнение имеет корень  $x=0$ . При  $x \neq 0$ ;  $a \neq 1$  уравнение принимает вид  $x^2 = (1+a)/(1-a)$ .

\* Этот ответ соответствует случаю, когда центры боковой грани призмы и основания конуса совпадают. (Примеч. ред.)



2. а)  $L(u) = \frac{1}{2\cos u} + 2\cos u$ ; б)  $u = \frac{\pi}{3}$ ; в)  $\left\{ \frac{\pi}{4}; \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$ ;  
 3. а)  $] -5; 3[$ ; б)  $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$ ; в)  $R$ .

**Вариант 2**

1. а)  $] -\infty; 0[ \cup ] 1; \infty [$ ; б)  $x = \frac{2}{2 - e^y}$ ;  
 в)  $] -\infty; \ln 2[ \cup ] \ln 2; +\infty[$ . Указание. Область значений функций совпадает с областью определения обратной функции.  
 г)  $] -\infty; 0[ \cup ] 2; \infty[$ .  
 2. а)  $\frac{R}{3}$ ; б) Функция  $S(r)$  возрастает;  
 в)  $\left\{ \frac{4}{3}R; \frac{3}{2}R \right\}$ .  
 3. а)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Указание. Выполните замену  $t = \cos 2x$ .  
 б) л. Указание. Поскольку  $f(x) = \frac{2\cos 2x}{5 - 3\cos 2x} = g(\cos 2x)$ , где  $g(t) = \frac{2t}{5 - 3t}$  и функция  $g(t)$  возрастает при  $t \in [-1; 1]$ , равенство  $f(x_1) = f(x_2)$  (или, что то же самое,  $g(\cos 2x_1) = g(\cos 2x_2)$ ) означает, что  $\cos 2x_1 = \cos 2x_2$ . Поэтому период данной функции совпадает с периодом функции  $\cos 2x$ .  
 в)  $y_{\min} = -\frac{1}{4}$ ,  $y_{\max} = 1$ . Указание. Воспользуйтесь монотонностью функции  $g(t)$ .

**Устный экзамен**

1.  $\frac{120}{119}$ . 2.  $] -\infty; \frac{11}{7}[ \cup ] 4; \infty[$ . 3.  $] -\infty; -\sqrt{2}[ \cup ] \sqrt{2}; +\infty[$ . 4. См. рис. 5.  
 5.  $x = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). 6.  $\sin 1 > \cos 1$ . Указание.  $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ . 7.  $x = \frac{2y+1}{y-2}$ , то есть данная функция совпадает со своей обратной.  
 8. См. рис. 6.

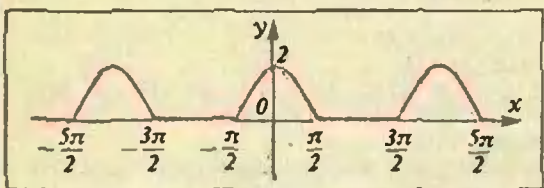


Рис. 5.

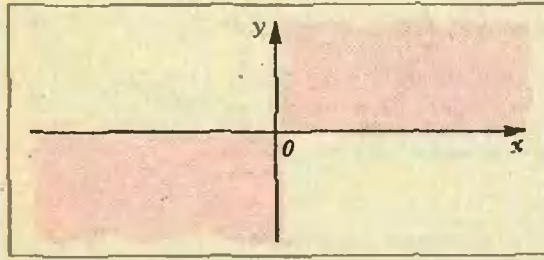


Рис. 6.

9.  $\left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ . Указание. Пусть  $x_1, x_1 - h, x_1 + h$  — корни данного уравнения. Это значит, что  $x_1^3 + x_1^2 = a, (x_1 - h)^3 + (x_1 - h)^2 = a, (x_1 + h)^3 + (x_1 + h)^2 = a$ . Осталось решить полученную систему уравнений.  
 10.  $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Указание. Пусть  $t = |\cos x|$ . Тогда  $y = t + |2t^2 - 1|, t \in [0; 1]$ .  
 11. Воспользуйтесь неравенством  $|a+b| < |a| + |b|$ .  
 12.  $S$  может принимать любые значения из промежутка  $[4; \infty[$ . Указание. Если  $A(x_1, \frac{1}{x_1}), C(-x_2, -\frac{1}{x_2}), x_1 > 0, x_2 > 0$ , то  $S = (x_1 + x_2) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 + t + \frac{1}{t}$ , где  $t = \frac{x_1}{x_2}$ , причем наименьшее значение выражения  $2 + t + \frac{1}{t}$  при  $t > 0$  равно 4.

**Физика**

1.  $l_{\min} = 5\sqrt{3}$  км  $\approx 8,7$  км. Указание. Расстояние между теплоходами будет минимальным через время  $t = (l_1 + l_2)/v$  (где  $v$  — скорость теплоходов после начала движения).  
 2.  $A = 2mgh$ .  
 3.  $\beta = (1 - \alpha) \rho_{\text{ж}} / \rho_{\text{л}} \approx 74\%$ .  
 4. Давление увеличивается.  
 5.  $r = ah^{-1/3}$ , где  $a$  — постоянный коэффициент (температура воды в водоеме не меняется).  
 6.  $q = mv^2 / (2e)$ , причем  $q < 0$ .  
 7.  $P_1/P_2 = P_2/P_1 = 2,5$ .  
 8.  $B = E/v = 10$  Тл, при этом вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  перпендикулярен векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$ .  
 9.  $x = h \sin \alpha \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{(n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right)$ .

10. Линзу следует поместить на расстояниях  $d_1 \approx 0,8$  м,  $d_2 \approx 0,19$  м,  $d_3 \approx 0,69$  м и  $d_4 \approx 0,22$  м от источника.

**Московский архитектурный институт**

**Математика**

1. а)  $2\cos \alpha$ ; б)  $b/a$ .  
 2. а)  $3/16$ ; б)  $1/4$ ; в)  $0$ .  
 4. а)  $\left\{ \log_2 \frac{3}{2} \right\}$ ; б)  $\{ 2^{2 \log_2 3} \}$ ; в)  $x_1 = \frac{\pi}{8} \times \times (4k+1); x_2 = \frac{2\pi}{3} (3l \pm 1) (k, l \neq 0)$ .  
 5. а)  $] -1; 1[$ ; б)  $] -1; 0[ \cup ] \frac{1}{2}; 2[$ ; в)  $] 0; +\infty[$ .  
 6. а) см. рис. 7. б) см. рис. 8.  
 7.  $\{(4; 10); (10; 4)\}$ .

**Физика**

1.  $l = vt - Ft^2 / (2m) = 510$  м.  
 2.  $T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ .  
 3.  $A = F_0 \Delta l^2 / (2M_0) = 60$  Дж.  
 4.  $T_{\max} = 3mg$ .  
 5.  $H = 2/3R$ .



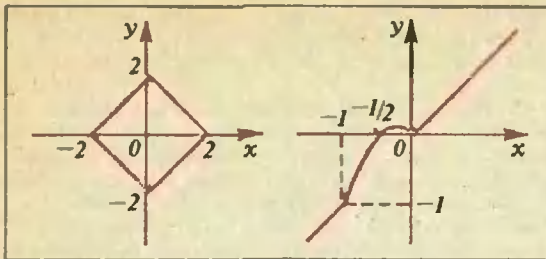


Рис. 7.

Рис. 8.

6.  $F = mg(h+l)/l = 2$  кН.

7.  $\mu = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2 + s}} \approx 0.05$ .

8.  $t = 2m\lambda/N \approx 3.7$  ч.

9.  $q = mgd/U \approx 10^{-15}$  Кл.

10.  $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 3.6 \cdot 10^{-6}$  Дж.

Диофантово уравнение А. А. Маркова  
(см. «Квант» № 4)

1. Доказательство. Пусть, например,  $b = a$ . Тогда  $a^2 + 2b^2 = 3b^2$ ;  $a^2 = b^2(3a - 2)$ . Следовательно,  $b^2$  — делитель  $a^2$ , а значит,  $b$  — делитель  $a$ , то есть  $a = bd$ , где  $d$  — натуральное число. Но тогда в силу первого равенства:  $d^2 + 2 = 3bd$ ,  $2 = (3b - d)d$ , так что  $d$  делит 2, откуда  $d = 1$  или  $d = 2$ . В обоих случаях  $b = 1$  и, так как  $c = b = 1$ , мы для  $a$  получаем уравнение  $a^2 + 2 = 3a$ , откуда  $a = 1, 2$ , то есть получены сингулярные решения.

2. Доказательство. Мы можем считать, что  $a > b > c$ . Воспользуемся многочленом

$$\Phi_a(x) = x^2 - 3bcx + b^2 + c^2,$$

который имеет своими корнями  $a$  и  $a'$ . Так как  $(b-a)(b-a') = \Phi_a(b) =$

$$= 2b^2 + c^2 - 3b^2 c < 3b^2 - 3b^2 c < 0,$$

число  $b$  лежит между  $a$  и  $a'$ , следовательно,  $a > a'$ . Поэтому максимальная координата решения  $(a', b, c)$  меньше максимальной координаты решения  $(a, b, c)$ . Аналогично, используя многочлен

$$\Phi_b(x) = x^2 - 3acx + a^2 + c^2,$$

можно установить, что  $a$  находится между  $b$  и  $b'$ , значит (так как  $a > b$ ),  $b' > a$ . Поэтому максимальная координата решения  $(a, b', c)$  больше максимальной координаты решения  $(a, b, c)$ . Сходным образом устанавливается, что максимальная координата решения  $(a, b, c')$  больше максимальной координаты решения  $(a, b, c)$ .

3. Указание. Воспользуйтесь родословным деревом. Если не сумеете найти доказательство, посмотрите Следствие в конце статьи.

4. Доказательство. Пусть  $q$  — остаток от деления числа  $A$  на 3:  $A = 3p + q$  ( $q = 0, 1, 2$ ), тогда  $A^2 = 3(3p^2 + 2pq) + q^2$ . Если  $A$  делится на 3, то в этом и только в этом случае  $q = 0$ . Если же  $q = 1, 2$  ( $q^2 = 1, 4$ ), то при делении  $A^2$  на 3 будем получать в остатке 1. Отсюда уже следует утверждение задачи.

5. Доказательство. Если  $(a, b, c)$  — решение уравнения (6) (см. статью), то есть

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc, \quad (I)$$

то после умножения обеих частей (I) на 9, получим, что  $(3a, 3b, 3c)$  — решения уравнения (4). Обратно, если все координаты решения  $(A, B, C)$  уравнения (4) делятся на 3, то есть представляются в виде (5), то после подстановки

их в уравнение (4) приходим к равенству (I). Остается доказать, что у каждого решения уравнения (4) все координаты делятся на 3. Действительно, на 3 должна делиться, по крайней мере, одна из координат решения  $(A, B, C)$ , ибо в противном случае  $ABC$  не делится на 3, тогда как  $A^2 + B^2 + C^2$ , согласно задаче 4, делится на 3.

Но если хотя бы одна координата делится на 3, то  $A^2 + B^2 + C^2 = ABC$  делится на 3, а тогда по задаче 4 все  $A, B, C$  делятся на 3, что и требовалось доказать.

6. Доказательство. Рассмотрим, например, квадрат  $A^2$ . Если  $A$  четно, то  $A^2$  делится на 4; если же  $A$  нечетно ( $A = 2n + 1$ ), то  $A^2 = 4(n^2 + 1) + 1$ , так что  $A^2$  при делении на 4 в остатке дает 1. Отсюда уже легко следует утверждение задачи.

7. Доказательство. Пусть  $(A, B, C)$  — решение уравнения (3) при  $k = 2$ , то есть

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2ABC. \quad (II)$$

Докажем сначала, что все его координаты — четные.

Если бы среди  $A, B, C$  было только одно нечетное или если бы все они были нечетные, то левая часть (II) оказалась бы нечетной, тогда как правая — четная. Если же два из них были бы нечетными, то по задаче 6 при делении на 4 левая часть (II) дала бы в остатке 2, тогда как правая делилась бы на 4 без остатка. Итак,

$$A = 2a, B = 2b, C = 2c. \quad (III)$$

где  $a, b, c$  — натуральные числа. Используя (III) и (II), получим (после сокращения на 4) равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4abc.$$

В силу предыдущих рассуждений  $a, b, c$  — четные, то есть все числа  $A, B, C$  делятся на 4. Повторяя этот же прием, получим, что  $A, B, C$  делятся на 8, на 16, на 32 и т. д., то есть на любую натуральную степень числа 2. Для натуральных чисел это невозможно.

Откуда взять уравнение

(см. «Квант» № 4, с. 22)

2.  $\frac{1}{2} \sqrt{3} h^2 (h - 2r)$ . Указание. Обозначьте

через  $x$  длину ребра основания и выразите двумя способами квадрат высоты  $|SD|^2$  боковой грани  $BSC$ : из прямоугольного треугольника  $SKD$ , где  $K$  — основание высоты пирамиды, и из подобия треугольников  $SKD$  и  $SLO$ , где  $O$  — центр шара,  $L$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $SD$ . Получится уравнение  $h^2 + x^2/12 = 2rh + x^2/4$ .

3.  $15\sqrt{3}$ . Указание. Обозначьте боковые стороны  $BC$  и  $DA$  трапеции через  $x$  и  $y$ , тогда основания равны  $2x$  и  $2y$ , откуда  $x + y = 10$ , то есть  $y = 10 - x$ . Докажите, что именно  $\hat{B} = 60^\circ$ . После этого получите уравнение для  $x$ , выразив двумя способами квадрат высоты трапеции:  $h^2 = 3x^2/4 = y^2 - (2y - 2x - x/2)^2$ , откуда  $h = 1.5$ .

4.  $\sqrt{2}$  см. Указание. Пусть  $ON$  — радиус, проведенный в точку касания,  $F$  — точка его пересечения с биссектрисой угла,  $OE$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на эту биссектрису,  $OM$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на хорду  $AB$ . Тогда, с одной стороны,  $|OF| = |ON| - |OM| = R - \sqrt{R^2 - 3/2}$ , с другой стороны,  $|OF| = \sqrt{2} |OE| = \sqrt{2} x$

$\times \sqrt{R^2 - 7/4}$ .

5.  $(a/2)(5 + 4\cos \alpha \pm \sqrt{16\cos^2 \alpha + 8\cos \alpha - 23})$ .

Указание. Обозначьте искомые стороны через  $x$  и  $y$  и найдите их из системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = a^2, \\ a^2 = rR = (1/2)axy / (a + x + y). \end{cases}$$

6.  $(7 - \sqrt{15})a/4$ . Указание. Докажите, что центр искомой сферы лежит на прямой  $AP$ , где  $P$  — точка, симметричная точке  $C$ , относительно точки  $O$ . Обозначьте  $|OP|$  через  $x$  и найдите  $x$ , выразив двумя способами  $|OE|^2$ : с одной стороны,  $|OE|^2 = x^2/3$ , а с другой (по теореме косинусов из треугольника  $OAE$ , учитывая, что  $\cos \angle OAE = -1/\sqrt{3}$ ) —  $|OE|^2 = x^2 + 17a^2/4 - 7\sqrt{3}ax/3$ .

7.  $\text{tg } \varphi = \sqrt{q^2 - p^2} / (p\sqrt{2})$ .

8.  $\cos \lambda = \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin^2(\varphi/2) \cos \alpha \cos \beta$ .

**Избранные школьные задачи**

(см. «Квант» № 4)

1. Ответ: первое. Решение. Обозначим число 1111111111 через  $a$ . Нам нужно сравнить числа  $\frac{5a-2}{5a+2}$  и  $\frac{6a-2}{6a+3}$ . Заметим, что

$$(5a-2)(6a+3) > (5a+2)(6a-2) \quad (\text{так как } a > 2),$$

поэтому  $\frac{5a-2}{5a+2} > \frac{6a-2}{6a+3}$ .

2. Ответ: 22. Решение. Назовем «порцией» количество травы, съедаемое коровой за один день. К концу 24-го дня на лугу было съедено  $60 \cdot 24 = 1440$  «порций» травы, а к концу 60-го дня —  $60 \cdot 30 = 1800$  «порций». Таким образом, за 36 дней на лугу выросло  $1800 - 1440 = 360$  «порций» травы (по 10 «порций» в день), а с самого начала на нем было  $1440 - 24 \cdot 10 = 1200$  «порций». Поэтому к концу этого дня нужно съесть  $1200 + 100 \times 10 = 2200$  «порций» травы. Следовательно, искомое число коров равно  $2200 : 100 = 22$ . Отметим, что 10 коров могут непрерывно

пастись на этом лугу, причем количество травы на нем меняться не будет.

3. Ответ: а)  $a > 0, b < 0, c < 0$ ; б)  $a < 0, b < 0, c < 0$ .

Решение. Ветви параболы направлены в случае а) вверх, а в случае б) вниз, отсюда находим знак  $a$ ; знак  $c$  находим из условия  $c = f(1)$ ; для определения знака  $b$  проще всего воспользоваться формулой для абсциссы вершины параболы:  $x_0 = -b/2a$ . Отметим, что в задаче а) можно воспользоваться и теоремой Виета: сумма корней положительна, а их произведение отрицательно, поэтому числа  $-b/a$  и  $c/a$  отрицательны.

4. Ответ:  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Решение. Пусть медиана и высота делят угол  $C$  на три равные части (рис. 9). В треугольнике  $MCB$  биссектриса совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный, следовательно,  $CD$  — медиана и  $BD = MD = (1/4)AB$ . В треугольнике  $ACD$  отрезок  $CM$  — биссектриса, поэтому  $CD : AC = MD : AM = 1 : 2$ , то есть катет  $CD$  равен половине гипотенузы  $AC$ , следовательно,  $\angle CAD = 30^\circ, \angle ACD = 60^\circ$ , откуда  $\alpha = 30^\circ, \angle ACB = 3\alpha = 90^\circ$ , наконец,  $\angle CBA = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ .

5. а) Воспользуемся тем, что мера вписанного угла равна половине меры дуги, заключенной между его сторонами. Соединим точки  $B$  и  $C$  (рис. 10). По свойству внешнего

угла треугольника  $\angle \alpha = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \cup AB + \frac{1}{2} \cup CD$  (см. рис. 10, а);  $\angle 2 = \angle 1 + \angle \beta$ .

откуда  $\angle \beta = \angle 2 - \angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB - \frac{1}{2} \cup CD$  (см. рис. 10, б).

б) Ответ:  $90^\circ - \alpha/2 - \beta/2; 90^\circ - \alpha/2 + \beta/2; 90^\circ + \alpha/2 - \beta/2; 90^\circ + \alpha/2 + \beta/2$ . Решение. По формуле (2) п. а)  $\alpha = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup CD)$ ;

$\beta = \frac{1}{2} (\cup AD - \cup BC)$ . Так как  $\angle B - \angle D =$

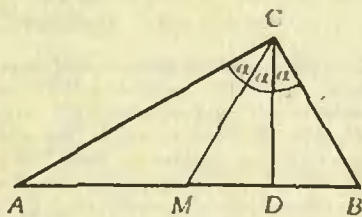


Рис. 9.

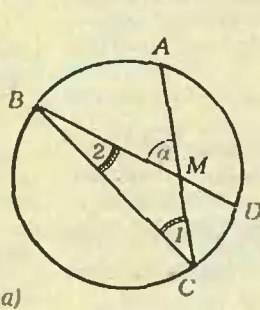
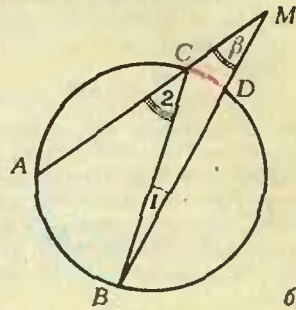


Рис. 10.



б)

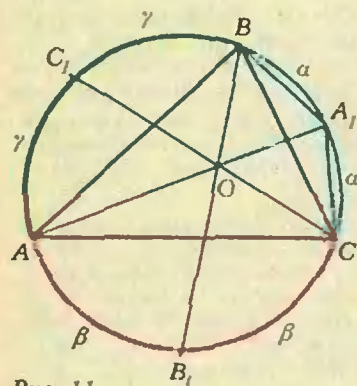


Рис. 11.

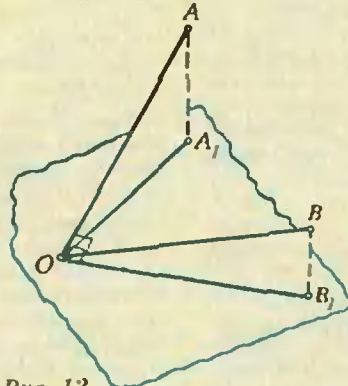


Рис. 12.

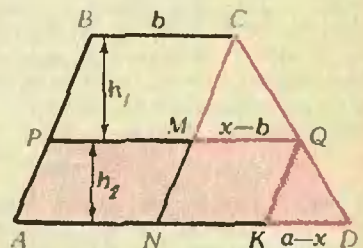


Рис. 13.



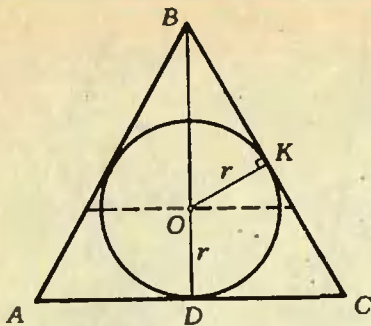


Рис. 14.

$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle CD + \sphericalangle AD) - \frac{1}{2}(\sphericalangle AB + \sphericalangle BC) = \beta - \alpha,$$

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ, \text{ то } \sphericalangle B = 90^\circ + \beta/2 - \alpha/2, \sphericalangle D =$$

$$= 90^\circ - \beta/2 + \alpha/2. \text{ Аналогично из системы}$$

$$\begin{cases} \sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ, \\ \sphericalangle C - \sphericalangle A = \alpha + \beta \end{cases}$$

находим  $\sphericalangle C = 90^\circ + \alpha/2$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ - \alpha/2 - \beta/2$ .  
 а) Обозначим через  $B_1$  и  $C_1$  точки пересечения прямых  $BO$  и  $CO$  соответственно с описанной окружностью (рис. 11). На рисунке 11 одинаковыми буквами отмечены равные дуги (например, дуги  $BA_1$  и  $A_1C$  равны, поскольку равны вписанные углы  $\sphericalangle BAA_1$  и  $\sphericalangle CAA_1$ ). Хорды  $BA_1$  и  $CA_1$  стягивают равные дуги и поэтому равны. Равенство  $BA_1 = OA_1$  вытекает из того, что треугольник  $BOA_1$  равнобедренный: каждый из углов  $\sphericalangle OBA_1$  и  $\sphericalangle BOA_1$  равен  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  — первый как вписанный, а второй — по формуле (1) задачи а).

6. Ответ:  $\frac{200}{101}$ . Указание. Преобразуйте каждую скобку по формуле  $1 + \frac{1}{n(n+2)} =$

$$= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

и сократите общие множители числителя и знаменателя

7. Ответ:  $y = 8x + 4$ . Указание. Запишите уравнение касательной к первой параболе в ее произвольной точке — точке с абсциссой  $x_1$ :  $y = (2x_1 + 4)x - x_1^2 + 8$  и уравнение касательной ко второй параболе в ее произвольной точке — точке с абсциссой  $x_2$ :  $y = (2x_2 + 8)x - x_2^2 + 4$ . Полученные прямые совпадают при условиях  $2x_1 + 4 = 2x_2 + 8$ ,  $-x_1^2 + 8 = -x_2^2 + 4$ , откуда, например,  $x_2 = 0$ .

8. Проведем плоскость  $\alpha_1$  параллельно плоскости  $\alpha$  через точку  $O$  (рис. 12). Тогда проекцией угла  $\sphericalangle AOB$  на плоскость  $\alpha_1$  будет прямой угол  $\sphericalangle A_1OB_1$ , и нам надо доказать, что либо  $(OA_1)$  совпадает с  $(OA)$ , либо  $(OB_1)$  совпадает с  $(OB)$ . Пусть прямые  $OA_1$  и  $OA$  не совпадают. Докажем, что в этом случае совпадают прямые  $OB_1$  и  $OB$ . По условию  $(OB_1) \perp (OA_1)$ , кроме того,  $(OB_1) \perp (OA)$ , поскольку прямая  $OB_1$  перпендикулярна проекции  $OA_1$  прямой  $OA$  на плоскость  $\alpha_1$  (по теореме о трех перпендикулярах); следовательно, прямая  $OB_1$  перпендикулярна плоскости  $AOA_1$ . Прямая  $OB$  также перпендикулярна плоскости  $AOA_1$ : она перпендикулярна прямой  $OA$  по условию и прямой  $OA_1$ . Итак, прямые  $OB$  и  $OB_1$  совпадают как два перпендикуляра к плоскости  $AOA_1$ , проведенные через точку  $O$ .

9. Ответ: а)  $1/8$ ; б)  $1/128$ . Решение.

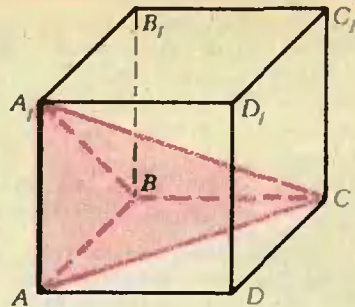


Рис. 15.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \\ &= \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ / (2 \cos 10^\circ) = \\ &= \sin 40^\circ \cos 40^\circ / (4 \cos 10^\circ) = \\ &= \sin 80^\circ / (8 \cos 10^\circ) = 1/8. \\ \text{б) Аналогично п. а) получаем } \cos(\pi/15) \times \\ &\times \cos(2\pi/15) \cos(4\pi/15) \cos(7\pi/15) = \\ &= -\cos(\pi/15) \cos(2\pi/15) \cos(4\pi/15) \cos(8\pi/15) = \\ &= 1/16; \cos(3\pi/15) \cos(6\pi/15) = 1/4; \text{ кроме того,} \\ \cos(5\pi/15) &= \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10. Ответ:  $\sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ . Указание. Пусть  $|AD| > |BC|$ ,  $PQ$  — данный отрезок, обозначим его длину через  $x$ . Проведем прямые  $CM$  и  $QK$ , параллельные прямой  $AB$  (рис. 13). Тогда по условию  $(b+x)h_1 / ((x+a)h_2) = 1$ , а из подобия треугольников  $CMQ$  и  $QKD$   $(x-b) / (a-x) = h_1/h_2$ , поэтому  $(b+x)(x-b) / (x+a) \times (a-x) = 1$ .

11. Ответ:  $2 \arcsin(\sqrt[3]{2}-1)$ . Указание. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 14). Из треугольника  $BOK$  получаем  $\sin(\alpha/2) = |KO|/|BO| = r/(h-r) = h/(h-r) - 1$ , где  $r$  — радиус вписанного шара,  $h$  — высота конуса. Одна из получившихся частей — конус, гомотетичный исходному с высотой  $h-r$ . Ее объем по условию в два раза меньше объема исходного конуса, поэтому  $h/(h-r) = \sqrt[3]{2}$ .

12. Ответ: а)  $(\sqrt{3}/2) \pm \sqrt{\sqrt{3}-5/4}$ ; б)  $7/9$ ;  $65/63$ . Указание. а) Легко проверить, что  $x = -1$  не является корнем уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на  $(x+1)^2$ , после чего получается квадратное уравнение  $y^2 + 2y - 2 = 0$  относительно переменной  $y = (x^2 - x + 1)/(x+1)$ . Корни этого уравнения будут  $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ . После этого остается решить квадратные уравнения  $x^2 - x + 1 = (-1 + \sqrt{3})(x+1)$  и  $x^2 - x + 1 = (-1 - \sqrt{3})(x+1)$  (второе из них решений не имеет). б) Убеждаемся, что  $x = 1$  не является корнем уравнения, и после деления обеих частей на  $\sqrt{(x-1)^2}$  получаем квадратное уравнение  $y^2 - 2y - 8 = 0$  относительно переменной  $y = \sqrt[3]{(x+1)/(x-1)}$ , корни которого равны 4 и -2. Решая уравнения замены  $\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)} = 4$  и  $\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)} = -2$ , получаем ответ.

13. Ответ:  $\pi^2/4 - 2$ . Указание. Данные касательные образуют углы  $45^\circ$  и  $135^\circ$  с осью  $Ox$ , поэтому треугольник  $ABC$  — прямоугольный и равнобедренный, его площадь равна  $\pi^2/4$ .

14. Ответ:  $(1+ab)/(8a-5ab)$ . Решение.

Перейдем к логарифмам по основанию 12. По условию  $\log_{12} 12 = a$ , поэтому  $\log_{12} 7 = 1/a$ ;  $\log_{12}(2 \cdot 12) = b$ , поэтому  $\log_{12} 2 = b - 1$ . Следовательно  $\log_{54} 168 = \log_{12} 168 / \log_{12} 54 = (1 + \log_{12} 7 + \log_{12} 2) / (3 - 5 \log_{12} 2) = (1 + 1/a + b - 1) / (3 - 5 \times (b - 1))$ .

**Замечание.** Можно было перейти к логарифмам и по другому основанию, например 2 или 3.

15. а) Рассмотрим, например, тетраэдр, вершинами которого являются вершины  $A_1, A, B$  и  $C$  куба  $AB_1C_1D_1$  (рис. 15). Высоты, проведенные из вершин  $A_1$  и  $C$ , суть отрезки  $A_1A$  и  $CB$ . Очевидно, что прямые  $A_1A$  и  $CB$  не пересекаются.

б) Указание. Каждое из условий «высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются» и «высоты  $CC_1$  и  $DD_1$  пересекаются» эквивалентно условию «ребра  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны». Достаточно показать эквивалентность условию «высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются» и «ребра  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны». Докажем эту эквивалентность. Пусть указанные высоты пересекаются, тогда плоскость, проходящая через них, содержит ребро  $AB$  и перпендикулярна ребру  $CD$ , поэтому  $(CD)$  перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в частности, прямой  $AB$ . С другой стороны, если прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны, то существует плоскость, проходящая через  $(AB)$  и перпендикулярная  $(CD)$ . Обе высоты лежат в этой плоскости и поэтому пересекаются.

**Метрические соотношения в треугольнике** (см. «Квант» № 4)

1.  $\pi/4 + \arctg(3/4), \pi/4 + \arctg(3/4), \pi/2 - 2 \arctg(3/4)$ .

**Решение.** Заметим, что  $|AC| = 2 \cdot 4a \cos(\alpha + \pi/4)$  (рис. 16). По теореме синусов для  $\triangle AEC$ :

$$\frac{a}{\sin \pi/4} = \frac{2 \cdot 4a \cos(\alpha + \pi/4)}{\sin(\pi/2 - \alpha)}$$

откуда  $\alpha = \arctg(3/4)$ .

**Замечание.** Задачу можно решить и другим способом — без использования теоремы синусов. Ответ можно записать также в следующем виде:

$$\arctg 7, \arctg 7, \pi - 2 \arctg 7$$

(так как  $\pi/4 + \arctg(3/4) = \arctg 7$ ).

2.  $\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{3}{4}(\pi - \alpha)}$ . **Решение.** По теореме синусов для  $\triangle ABD$ :  $|AD|/|AB| = \sin \alpha / \sin \widehat{ADB}$ ,

но  $\widehat{ADB} = \pi - \widehat{B} - \widehat{A}/2 = 3(\pi - \alpha)/4$  (рис. 17).

3.  $|AD| = \frac{c \sin \alpha}{\sin(3\alpha/2)}, R = \frac{c}{2 \cos(\alpha/2)}$ . **Решение.**

По теореме синусов для  $\triangle ABD$ :  $|AB|/\sin \widehat{ADB} = |AD|/\sin \alpha$ , но  $\widehat{ADB} = \pi - (3\alpha)/2$  (рис. 18).

4.  $\sqrt{c(b+c)}$ . **Решение.** Обозначим  $|BC| = a$  и проведем биссектрису  $AD$  (рис. 19). Из подобия треугольников  $ABD$  и  $ABC$  получаем  $c/|BD| = a/c$ . По свойству биссектрисы  $|BD|/(a - |BD|) = c/b$ , откуда, исключая  $|BD|$ , находим  $a = \sqrt{c(b+c)}$ .

**Замечание.** Возможно другое решение с применением теоремы синусов для  $\triangle ABC$ .

5.  $\widehat{A} = \arctg 2, \widehat{B} = \arctg 3, C = \pi/4$ . **Решение.** Пусть  $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b, \widehat{B} = \beta, C = \gamma$  (рис. 20). Тогда  $|BM| = 5a/4$ . Из треугольников

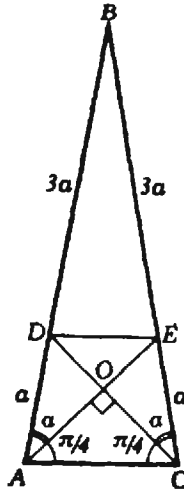


Рис. 16.

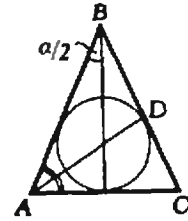


Рис. 17.

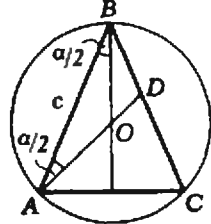


Рис. 18.

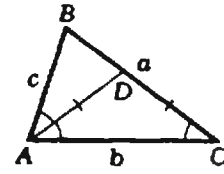


Рис. 19.

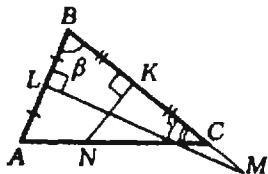


Рис. 20.

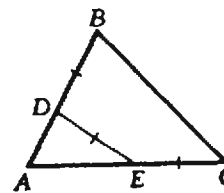


Рис. 21.

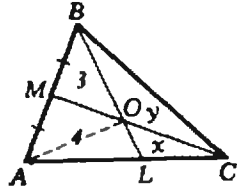


Рис. 22.

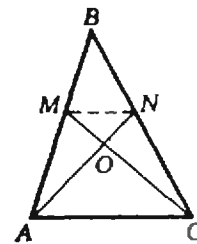


Рис. 23.

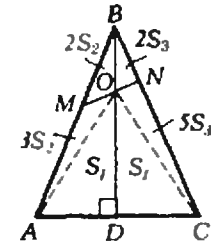


Рис. 24.

$BLM$  и  $KNC$  получаем

$$c/2 = 5a(\cos \beta)/4, \tag{1}$$

$$a/2 = 2b(\cos \gamma)/3. \tag{2}$$

Кроме того, по теореме синусов для  $\triangle ABC$ :  $a/\sin(\beta + \gamma) = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$ .  $\tag{3}$

Перемножая равенство (1) и равенство  $a/\sin(\beta + \gamma) = c/\sin \gamma$ , получаем

$$2 \sin \gamma = 5 \cos \beta \cdot \sin(\beta + \gamma). \tag{4}$$

Аналогично, из равенств (2) и (3) находим

$$4 \sin \beta \cos \gamma = 3 \sin(\beta + \gamma). \tag{5}$$

Из (5) находим  $\sin \beta \cos \gamma = 3 \cos \beta \sin \gamma$ , или  $\text{tg } \beta = 3 \text{tg } \gamma$ .  $\tag{6}$

Разделив (4) на (5), получим

$\operatorname{tg} \gamma = 5(\sin 2\beta)/3.$  (7)

Из (6) и (7):  $5 \sin 2\beta = \operatorname{tg} \beta$ , или  $\operatorname{tg} \beta = 3$ . Тогда из (6) следует  $\operatorname{tg} \gamma = 1$ .

6.  $6\sqrt{3}/25$ . Решение. Обозначим  $|BD| = |DE| = |EC| = x$  (рис. 21). По теореме косинусов для  $\triangle ADE$ :

$(2-x)^2 + (3-x)^2 - 2(2-x)(3-x) \cos A = x^2.$  (8)

Значение  $\cos A$  находим по теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :  $2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos A = (\sqrt{7})^2$ , откуда  $\cos A = 1/2$ ,  $A = \pi/3$ . Из (8) получаем  $x = 7/5$ , поэтому  $S_{\triangle ADE} = |AD| \cdot |AE| \sin A / 2 = 6\sqrt{3}/25$ .

7.  $8,4 \text{ см}^2$ . Пусть  $x$  и  $y$  — площади треугольников  $EOC$  и  $COB$  (рис. 22). Площади треугольников  $AOM$  и  $MOB$  равны, поэтому  $S_{\triangle AOL} = 1$ . Полу-

чаем  $\frac{1}{x} = \frac{|AL|}{|LC|} = \frac{7}{x+y}$ . Решая полученную

систему, находим  $x = 1/5$ ,  $y = 6/5$ , откуда площадь треугольника  $ABC$  равна  $42/5 \text{ см}^2$ .

8. Присоединим к треугольникам  $AOM$  и  $CON$  треугольник  $AOC$  (рис. 23). Очевидно,  $S_{\triangle AOM} = S_{\triangle CON}$ , тогда и только тогда, когда  $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle ANC}$ . Последнее равенство эквивалентно условию, что точки  $M$  и  $N$  находятся на одинаковом расстоянии от прямой  $AC$ , то есть  $(MN)$  параллельна  $(AC)$ .

9. 2:1. Решение. Обозначим  $S_1 = S_{\triangle AOD} = S_{\triangle DOC}$ ,  $S_{\triangle AOM} = 3S_2$ ,  $S_{\triangle ONC} = 5S_3$  (рис. 24). Тогда  $S_{\triangle MOB} = 2S_2$ ,  $S_{\triangle BON} = 2S_3$ . Из равенства площадей треугольников  $ABD$  и  $CBD$  получаем:  $S_1 + 5S_2 = S_1 + 7S_3$ . Из формулы (IV) (см. статью) следует:  $S_{\triangle MBN} = |BM|/|BA| \cdot |BN|/|BC| \cdot S_{\triangle ABC} = 4/35 S_{\triangle ABC} = 4/35 (2S_1 + 5S_2 + 7S_3)$ . Из полученных соотношений вытекает, что  $S_1 = 10S_2$ , откуда  $|DO|/|BO| = S_1/(5S_2) = 2$ .

10.  $1,2 \text{ см}$ .

11.  $5:2$ .

**Калейдоскоп «Кванта»**

(см. «Квант» № 3)

**Головоломки**

1. В первом случае можно пройти через все клетки, отмеченные числами (рис. 25, а), во втором — такой обход уже невозможен.

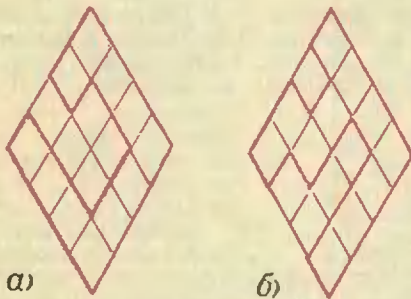


Рис. 25.

		7	8	4
	1	2	1	
1	6	9		

Рис. 26.

Остается непройденной какая-нибудь клетка от 13 до 24. Максимальная сумма оказывается в том случае, если не обходится клетка 13 (рис. 25, б). (Номера клеток указаны на с. 32 «Кванта» № 3.)

2. См. рис. 26.

3. Решение имеет только второй вариант головоломки. Оно состоит в следующем: конец петли следует провести через левое нижнее отверстие, затем через правое нижнее, вытянуть из этого отверстия и продеть через конец петли маленькую пуговицу; после этого можно вытащить нитку из большой пуговицы, потянув за маленькую пуговицу.

**Калейдоскоп «Кванта»**

(см. «Квант» № 4)

**Задачи и задачки**

1. При запуске спутника вдоль экватора в сторону вращения Земли линейная скорость точного вращения складывается со скоростью, сообщенной спутнику двигателем ракеты. Естественно, при запуске вдоль меридиана (а тем более вдоль экватора в сторону, обратную вращению Земли) потребуется больше энергии для сообщения спутнику первой космической скорости.

2. При скатывании с горки потенциальная энергия лыжника полностью расходуется на работу против силы трения. Втаскивая лыжника, стоящего на лыжах, подъемник восполняет его запас потенциальной энергии и кроме того совершает работу против силы трения. Затраты энергии в этом случае больше, чем при возвращении к месту старта в кресле подъемника. (Конечно, мы не учли действие сил сопротивления воздуха, считая скорость лыжника небольшой.)

3. При охлаждении гитары часть ее внутренней энергии идет на увеличение потенциальной энергии упругой деформации.

4. Несмотря на то, что при подъеме на высоту 8000 метров потенциальная энергия порции горючего увеличилась, при ее сгорании выделится столько же энергии, сколько и на уровне моря. Работа по подъему горючего в конечном итоге увеличивает потенциальную энергию продуктов сгорания.

5. Работа по разгону стрелы совершается за счет потенциальной энергии упругой деформации корпуса «натянутого» лука и тетивы. Понятно, что возникающие при деформации лука и тетивы силы равны. Однако тетива в хорошем луке мало растяжима, то есть обладает большим коэффициентом упругости  $k$ . Можно считать, что упругая энергия зависит от величины  $k$  примерно так же, как и у пружины:  $U = \frac{kx^2}{2} = \frac{F^2}{2k}$ . Ясно, что больший вклад

в энергию стрелы вносит корпус лука.

6. При подъеме шара его потенциальная энергия увеличивается, однако на занимаемое им место с той же высоты опускается воздух, плотность которого больше средней плотности шара.

7. Резонатор усиливает рассеяние звука. Хотя будет слышен более сильный звук, его длительность станет меньше, излученная же энергия в обоих случаях одинакова.

8. Работа, требуемая для разрыва чугунной сферы, производится за счет внутренней энергии замерзающей воды.



9. Бабочка «разогревается» подобно спортсмену, делающему разминку перед стартом. Иначе говоря, часть совершаемой ею механической работы идет на увеличение внутренней энергии.

10. Энергия колебаний расходуется на возбуждение вихревых токов в каркасе прибора и в цепи замкнутой катушки, в конечном итоге — на нагревание прибора.

11. Чтобы магнит мог вторично притянуть предмет, его необходимо удалить, то есть совершить работу против силы, действующей на магнит со стороны предмета. Эта работа будет равна той, что совершил магнит при подъеме предмета.

#### Микроопыт

Вода в первой бутылке практически не вращается; ее потенциальная энергия почти целиком переходит в кинетическую энергию поступательного движения. Значительная доля потенциальной энергии второй бутылки с песком переходит в кинетическую энергию вращательного движения. Скорость поступательного движения второй бутылки оказывается меньше, а время скатывания — больше.

#### Портреты

Декарт, Джоуль, Майер, Ломоносов, Плапк, Лейбниц, Эйнштейн, Гельмгольц, Курчатов.

#### Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

**Задание 3** (Э. Погосянц). 1. bc! Пешки неожиданно разъединяются, после 1. a4 cb черные легко выигрывают. 1...Krb6!! В случае 1...Kp:a6 белых спасает маневр Рети: 2. Kp:h7 Kpb6 3. Kpg7 f5 4. Kpf6 f4 5. Kpe5 f3 6. Kpd6 f2 7. c7 с ничьей. 2. a7!! Грозило 2...Kp:c6 и т. д. 2...Kp:a7 3. Kp:f7!! Но не 3. Kp:h7? f5 4. Kpg6 f4 5. Kpf5 f3 6. Kpe6 f2 7. c7 f1Ф 8. c8Ф Фh3+. 3...Krb6! — и на доске возникла знакомая нам позиция Зинара («Квант», 1985, № 2). Как мы знаем, после 4. Kpg7! белые спасаются.

**Задание 4** (Э. Погосянц). 1. Kpb3!! Но не 1. Kp:a3? Kpg5 2. Kpb3 Kpf4 3. h4 Kp:f3 4. h5 Kpe4 5. h6 Kpd3, и маневр Рети выручает черных. 1...a2! 2. Kp:a2 Kpg5 3. Kpb1!! Kpf4 4. h4 Kp:f3 5. h5 Kpe4 6. h6 Kpd3 7. Kpc1! и все усилия черных оказались напрасными. Этот этюд относится к теме анти-Рети: умело маневрируя, белые помешали черным воспользоваться геометрическим маневром Рети.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Никитин, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Номер подготовили

А. Н. Виленин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Иллен, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

#### Номер оформили:

М. В. Дубах, А. Я. Коршунов, И. М. Оффенгенден, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

#### Фото представили:

В. В. Бузин, В. П. Шевченко, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления

Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103008 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант», тел. 250 33-54

Сдано в набор 20.03.85.

Подписано к печати 24.04.85.

Печать офсетная

Бумага 70 × 108 1/16. Усл. кр. от. 23,8.

Усл. печ. л. 3,6. Уч.-изд. л. 7,55. Т 07474.

Цена 40 коп. Заказ 692. Тираж 179 074 экз.

Орден Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
142300, г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гук.

## ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Среди необычных шахматных задач и головоломок немалое место занимают задания, требующие тех или иных вычислений. Знакомству с этой темой посвящается сегодняшняя «страничка».

Самый быстрый мат в шахматной партии возможен уже на втором ходу, и его объявляет черный ферзь: 1. f3 e5 2. g4 Фh4×.

Здесь, пожалуй, стоит привести один забавный случай, который произошел с М. Таймановым в партии с микрокомпьютером. Гроссмейстер сыграл 1. f3, и в ответ на 1...e5 пошел 2. g4. Маленький робот сделал хороший развивающий ход — 2...d5. Ход действительно неплох, но мат ферзем на h4, кажется, был чуть сильнее. Тайманов продолжал эксперимент: 3. Кс3, а автомат все централизовывал фигуры — 3...Кс6, затем 4...Cd6, 5...Се6. И лишь после того как черные полностью закончили мобилизацию своих фигур, они решились объявить мат — Фd8 — h4×. Да, неплохо играет компьютер, но порой уж слишком правильно. Показательная партия, иллюстрирующая разницу между игрой людей и компьютеров!

Итак, самая быстрая матовая партия продолжается два хода, а самая короткая? Вопрос может вызвать недоумение, разницы между «быстрой» и «короткой» как будто нет. Уточним задание.

*Придумать партию, заканчивающуюся матом, в которой длина всех произведенных ходов минимальна.*

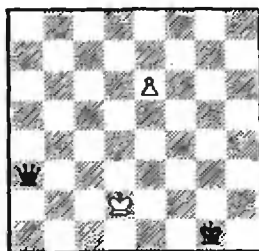
Очевидно, за единицу длины следует принять перемещение фигуры на одно поле вдоль вертикали или горизонтали, а сдвиг по диагонали составляет  $\sqrt{2}$ .

Первое впечатление, будто самая быстрая партия должна быть и геометрически самой короткой, но это не так. Партия 1. f3 e5 2. g4 Фh4× состоит из четырех ходов пешек по вертикали и четырех перемещений ферзя — за один ход — по диагонали, итого  $4+4\sqrt{2} \approx 9,66$ . Рекорд же принадлежит, как ни странно, четырехходовой партии: 1. d3 e6 2. Фd2 Кре7 3. Фе3 e5 4. Ф:e5×, ее длина равна  $7+\sqrt{2} \approx 8,41$ .

Вот еще две подобные задачи на шахматное конструирование. *Придумать геометрически кратчайшую последовательность ходов, приводящих к шаху. Такой же вопрос для двойного шаха.*

Решения: 1. e3 b6 2. Кре2 Сa6+ или 1. b3 e6 2. Сb2! Кре7 3. Ca3+, оба — длины  $3+2\sqrt{2}$ . И рекордный двойной шах ставится на третьем ходу: 1. e4 d6! 2. Кре2 d5 3. Кpd3 de++, его длина  $5+2\sqrt{2}$ .

Геометрический расчет часто встречается в композиции. В жанре сказочных шахмат довольно популярны задачи-максимумеры, в которых черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. Обычно максимумеры используются в «обратных матах». В задачах на обратный мат белые вынуждают противника объявить мат их королю. Вот задача-малышка на эту тему.



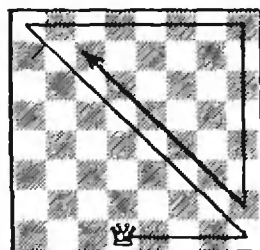
П. Моутесвидс, 1965 г. Обратный мат в 5 ходов при ходе черных и в 6 ходов при ходе белых (максимуммер).

При ходе черных: 1...Фf8 (самое длинное —  $5\sqrt{2}$ ) 2. e7 Фf1 (обратной дороги нет) 3. e8J! Фа6 4. Je2! (препятствуя возвращению ферзя на f1 и подготавливая блокировку своего короля) 4...Фh6+ 5. Кре1 Фc1×.

При ходе белых: 1. e7 Фh3 (теперь это самый длинный ход) 2. e8Ф Фе8 (длиннее, чем Фа3,  $5\sqrt{2} > 7$ ) 3. Фd7

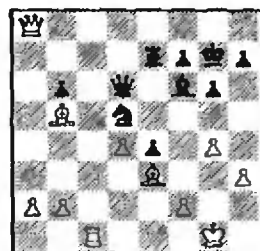
Фc1+ (диагональ перекрыта и приходится ходить по вертикали) 4. Кре2 Фh6 5. Фd2 Фа6+ 6. Кре1, и, как черные ни сопротивлялись, они вынуждены объявить мат 6...Фf1×.

И в заключение задача, в которой вообще участвует один ферзь. *Какой геометрически самый длинный путь, не пересекающий сам себя, может проделать ферзь за пять ходов, начиная с поля d1?*

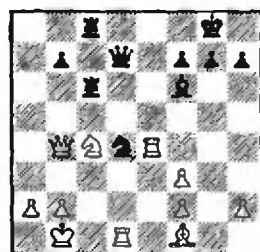


Искомый путь показан на рисунке. Чаше предлагают другое решение: Фd1—h1—h8—a1—a8—g8. Число полей в данном случае действительно больше ( $32 > 30$ ), однако геометрически этот путь короче, хотя разница всего лишь в сотые доли.

## Конкурсные задания



9. Ход белых. Оцените позицию.



10. В этой позиции белые сделали «форточку», опасаясь за свою первую горизонталь — 22. a3. А между тем в их распоряжении был ход 22. Кb6 с вилкой. Установите, удачен ли этот маневр.

Срок отправки решений — 25 июля 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Мы продолжаем начатую во втором номере серию чертежей к стереометрическим задачам, цель которой — помочь читателям развить пространственное воображение. При самостоятельном решении задач такие картинки надо стараться представлять себе мысленно. (Как правило, точные чертежи можно построить, только решив задачу хотя бы частично, к тому же непосредственно для решения они чаще всего не очень нужны.)

Решение предлагаемой ниже задачи вы найдете в следующем номере журнала.

**Задача.** Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту. Внутри цилиндра, но вне конуса расположены шесть равных сфер, каждая из которых касается верхнего основания и боковой поверхности цилиндра, двух соседних сфер и боковой поверхности конуса. Радиус каждой сферы равен  $r$ . Найти радиус сферы, вписанной в конус.

